

esec

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO



INSTITUTO POLITÉCNICO
DE COIMBRA

Departamento de Educação da Escola Superior de Educação de Coimbra

Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e
Ciências Naturais no 2.º Ciclo de Ensino Básico

Modelação Matemática Como Ambiente de Aprendizagem: O Uso De Manipulativos Virtuais No Desenvolvimento Dos Sentidos Da Adição E Da Subtração

Ricardo Jorge Pratas da Silva

Coimbra, 2018

esec

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO



INSTITUTO POLITÉCNICO
DE COIMBRA

Ricardo Jorge Pratas da Silva

Modelação Matemática Como Ambiente de Aprendizagem: O Uso De Manipulativos Virtuais No Desenvolvimento Dos Sentidos Da Adição E Da Subtração

Relatório Final do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico e de
Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo de Ensino Básico, apresentado ao
Departamento de Educação da Escola Superior de Educação de Coimbra para
obtenção do grau de Mestre

Constituição do júri

Presidente: Professor Doutor Pedro Balaus Custódio

Arguente: Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto Costa

Orientador: Professor Doutor Fernando Manuel Lourenço Martins

Co-orientador: Professor Especialista Virgílio José Monteiro Rato

Abril, 2018

Agradecimentos

Aos meus orientadores, pela paciência, apoio e constante desafio.

Aos meus pais, por estarem sempre comigo, sem o vosso apoio incondicional nada disto seria possível.

À Salomé, por tudo!

Ao Chico e à Inês, pelo imprescindível contributo logístico.

À Cristina, à Sofia e ao Pedro, pelos pequenos grandes contributos no desenho das tarefas.

À Professora Isabel Raimundo, pela inspiração e confiança no meu trabalho.

A todos os alunos e alunas que participaram neste projeto, pelo vosso empenho e honestidade.

A todas as pessoas, grandes e pequenas, que alguma vez partilharam uma sala de aula comigo.

O meu muito OBRIGADO.

Menção ao apoio financeiro

Este trabalho é financiado pela FCT/MEC através de fundos nacionais e quando aplicável cofinanciado pelo FEDER, no âmbito do Acordo de Parceria PT2020 no âmbito do projeto UID/EEA/50008/2013



Modelação Matemática Como Prática De Sala De Aula: O Uso De Manipulativos Virtuais No Desenvolvimento Dos Sentidos Da Adição E Da Subtração

Resumo: O relatório final aqui apresentado, cuja estrutura se encontra dividida em três partes, procura descrever a vivência do estagiário ao longo deste percurso de formação. A introdução, que enquadra as práticas pedagógicas realizadas, precede o capítulo que contempla a componente investigativa – suportada por um conjunto de intervenções junto de uma turma do 1.º Ano do 1.º CEB –, cujo objetivo visa compreender de que forma a integração dos manipulativos virtuais nas práticas de sala de aula, usando a Modelação Matemática como ambiente de aprendizagem (MMCAA), gera impactes positivos na construção do conhecimento dos alunos relacionado com a promoção do desenvolvimento dos sentidos da adição e da subtração. Surge no terceiro capítulo uma componente reflexiva, com uma análise crítica da prática pedagógica implementada e do seu contributo para o desenvolvimento profissional do mestrando, na ótica do professor reflexivo, em contínua aprendizagem.

Optou-se por uma investigação qualitativa de índole interpretativa e design investigação-ação, recorrendo a *screen recording* e captação áudio para recolha de dados, ao *Base Blocks* e *GeoGebra* como manipulativos virtuais. Como principais resultados, salienta-se uma progressão dos alunos na sua capacidade de compreender os sentidos da adição e da subtração presentes em situações problemáticas; estabelecer relações entre o significado das quantidades envolvidas e a estrutura das operações aritméticas adição e subtração com a resposta a situações problemáticas; usar linguagem matemática adequada.

A investigação sobre MMCAA e manipulativos virtuais mostra-se favorável à sua integração nos processos de ensino e de aprendizagem. A sua conjugação permite aos alunos autorregular as suas aprendizagens, assumir um papel ativo na construção do conhecimento, trabalhar de forma autónoma e estabelecer relações entre conceitos e ideias matemáticas.

Palavras-chave: Prática educativa, 1.º Ano do 1.º CEB, Modelação Matemática como ambiente de aprendizagem, manipulativos virtuais, sentidos da adição e da subtração.

Mathematical Modeling As Classroom Practice: The Use Of Virtual Manipulative In The Development Of Addition And Subtraction Senses

Abstract: The report presented here, whose structure is divided into three parts, seeks to describe the experience of the pre-service teacher throughout this master's course. The introduction, which frames the pedagogical practices carried out, precedes the chapter that includes the research component – supported by a set of interventions with a 1st Grade of Elementary School class – whose objective aims to understand how the integration of virtual manipulatives in classroom practices, using Mathematical Modeling as a learning environment (MMCAA), generates positive impacts on the construction of students' knowledge related to the promotion of the development of the senses of addition and subtraction. A reflexive component emerges in the third chapter, with a critical analysis of the implemented teacher practice and its contribution to the professional development of the pre-service teacher, from the viewpoint of the reflective teacher, in continuous learning.

A qualitative research of interpretative nature and research-action design was chosen, using screen recording and audio capture for data collection, Base Blocks and GeoGebra as virtual manipulatives. The main results highlight a progression of the students in their ability to: understand the addition and subtraction senses present in problematic situations; establish connections between the meaning of the quantities involved and the structure of addition and subtraction arithmetic operations, with the response to problematic situations; use suitable mathematical language.

Research on MMCAA and virtual manipulatives is favourable to their integration into teaching and learning processes. Their combination allows students to self-regulate their learning, take on an active role in the construction of knowledge, work autonomously and to establish connections between concepts and mathematical ideas.

Keywords: Educational practice, 1st Grade of Elementary School, Mathematical Modeling as a learning environment, virtual manipulatives, addition and subtraction senses.

Índice

Abreviaturas.....	VIII
Índice de quadros.....	VIII
Índice de figuras.....	VIII
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. COMPONENTE INVESTIGATIVA.....	7
2.1 Introdução.....	9
2.1.1. Motivação e formulação do problema.....	9
2.1.2. Objetivos de investigação.....	11
2.1.3. Pertinência do estudo.....	12
2.1.4. Estrutura da Componente Investigativa.....	13
2.2 Revisão da Literatura.....	14
2.2.1 Modelação Matemática como ambiente de aprendizagem.....	14
2.2.2 Sentidos das operações.....	20
2.2.3 Manipulativos virtuais.....	23
2.3 Opções metodológicas.....	27
2.3.1 Descrição do estudo.....	27
2.3.2 Contexto do estudo.....	30
2.3.3 Design do estudo.....	31
2.3.4 Recolha e análise de dados.....	32
2.4 Apresentação de resultados.....	33
2.4.1 Mapeamento das dificuldades dos alunos.....	33
2.4.2 Sessão de exploração.....	34
2.4.3 Sentido acrescentar.....	36
2.4.3.1 Fase Inicial.....	36
2.4.3.2 Fase de Intervenção.....	37
2.4.3.3 Fase Final.....	40
2.4.3.4 Síntese.....	41
2.4.4 Sentido retirar.....	41
2.4.4.1 Fase Inicial.....	41
2.4.4.2 Fase de Intervenção.....	43
2.4.4.3 Fase Final.....	48

2.4.4.4 Síntese	49
2.4.5 Sentido completar	50
2.4.5.1 Fase Inicial	50
2.4.5.2 Fase de Intervenção	51
2.4.5.3 Fase Final	56
2.4.5.4 Síntese	57
2.4.6 Sentido comparar	58
2.4.6.1 Fase Inicial	58
2.4.6.2 Fase de Intervenção	59
2.4.6.3 Fase Final	63
2.4.6.4 Síntese	64
2.4.7 Sentido juntar	65
2.4.7.1 Fase Inicial	65
2.4.7.2 Fase de Intervenção	66
2.4.7.3 Fase Final	70
2.4.7.4 Síntese	71
2.5 Discussão de resultados	72
2.6 Conclusões	75
2.6.1 Limitações do estudo	78
2.6.2 Recomendações para futuros estudos	78
3. COMPONENTE REFLEXIVA	79
3.1 1.º Ciclo do Ensino Básico	81
3.2 2.º Ciclo do Ensino Básico	83
3.2.1 Matemática	83
3.2.2 Ciências Naturais	85
3.3 Considerações finais	87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	91
APÊNDICES	111
Apêndice 1 – Questionário sobre literacia informática	113
Apêndice 2 – Fases do estudo	118
Apêndice 3 – Tarefas da Fase Inicial	127
Apêndice 4 – Manipulativos Virtuais usados no estudo	129

Apêndice 5 – Tarefas da Fase Final.....	134
Apêndice 6 – Resultados da Fase Inicial	136
Apêndice 7 – Tarefas da Fase de Intervenção	144
Apêndice 8 – Resultados da Fase Final	147

Abreviaturas

CEB – Ciclo de Educação Básica

CEM – Conhecimento Extra-matemático

ICTMA – Grupo Internacional de Ensino de Modelação Matemática e Aplicações

MMCAA – Modelação Matemática como ambiente de aprendizagem

NLVM – National Library of Virtual Manipulatives

PE – Professor Estagiário

TIC – Tecnologias de Informação e Comunicação

TPACK – Technological Pedagogical Content Knowledge

ZDP – Zona de Desenvolvimento Proximal

Índice de quadros

Quadro 1 – Metas curriculares relativas aos sentidos da adição e subtração	21
Quadro 2 – Sentidos da adição e da subtração	23
Quadro 3 – Cronograma das sessões de intervenção	31
Quadro 4 – Critérios de análise	32
Quadro 5 – Níveis dos alunos nas Fases Inicial e Final	74
Quadro 6 – Cronograma das sessões de intervenção	119
Quadro 7 – Classificação dos alunos nas tarefas da Fase Inicial	137
Quadro 8 – Classificação dos alunos nas tarefas da Fase Final	148

Índice de figuras

Figura 1 – Ciclo de Modelação Matemática (Ponte, 1992).....	16
Figura 2 – Processo de modelação (Galbraith & Stillman, 2006).....	17
Figura 3 – Ciclo da Modelação Matemática (Ferri, 2010).....	18
Figura 4 – Resolução do aluno A	36
Figura 5 – Resolução da aluna B.....	36
Figura 6 – Resolução do aluno C	37
Figura 7 – Resolução do aluno D	37
Figura 8 – Disposição inicial da reta numérica	37
Figura 9 – 1. ^a parcela representada pela aluna B.....	37
Figura 10 – Manipulação da 1.º parcela	39
Figura 11 – Manipulação da soma	39
Figura 12 – Leitura do aluno D	40
Figura 13 – Resolução da situação problemática	40
Figura 13 – Resolução do aluno A	40
Figura 14 – Resolução da aluna B.....	40
Figura 15 – Resolução do aluno C	40
Figura 16 – Resolução do aluno D	40
Figura 17 – Resolução do aluno A	42

Figura 18 – Resolução do aluno A.....	42
Figura 19 – Resolução do aluno C.....	42
Figura 20 – Resolução do aluno D.....	42
Figura 21 – Manipulação do aluno A.....	43
Figura 22 – Subtração concluída pelo aluno A.....	43
Figura 23 – Retirar o subtrativo ao aditivo.....	44
Figura 24 – Subtração com decomposição.....	44
Figura 25 – Manipulação da aluna B.....	44
Figura 26 – Representação do aditivo e subtrativo.....	45
Figura 27 – Decomposição de uma unidade de ordem superior.....	45
Figura 28 – Feedback do manipulativo.....	46
Figura 29 – Leitura da diferença entre 16 e 4.....	46
Figura 30 – Resolução da situação problemática.....	47
Figura 31 – Subtração criada pelo aluno D.....	47
Figura 32 – Resolução do aluno A.....	48
Figura 33 – Resolução da aluna B.....	48
Figura 34 – Resolução do aluno C.....	49
Figura 35 – Resolução do aluno D.....	49
Figura 36 – Resolução do aluno A.....	51
Figura 37 – Resolução da aluna B.....	51
Figura 38 – Resolução do aluno C.....	51
Figura 39 – Resolução do aluno D.....	51
Figura 40 – Manipulação da aluna B.....	52
Figura 41 – Manipulação do aluno A.....	52
Figura 42 – Resposta à tarefa 2.....	52
Figura 43 – Feedback e validação da tarefa pela <i>applet</i>	54
Figura 44 – Exploração da <i>applet</i> pelo aluno D.....	54
Figura 45 – Resolução da situação problemática.....	55
Figura 46 – Resolução do aluno A.....	56
Figura 47 – Resolução da aluna B.....	56
Figura 48 – Resolução do aluno C.....	56
Figura 49 – Resolução do aluno D.....	56
Figura 50 – Resolução do aluno A.....	58
Figura 51 – Resolução da aluna B.....	58
Figura 52 – Resolução do aluno C.....	59
Figura 53 – Resolução do aluno D.....	59
Figura 54 – Manipulação da aluna B.....	59
Figura 55 – Manipulação do aluno A.....	60
Figura 56 – Manipulação do aluno C.....	61
Figura 57 – Resolução da situação problemática.....	61
Figura 58 – resolução do aluno A.....	63
Figura 59 – Resolução da aluna B.....	63
Figura 60 – Resolução do aluno C.....	63
Figura 61 – Resolução do aluno D.....	63
Figura 62 – Resolução do aluno A.....	65
Figura 63 – Resolução da aluna B.....	65
Figura 64 – Resolução do aluno C.....	66

Figura 65 – Resolução do aluno D	66
Figura 66 – Tentativa de representar $34+28$	66
Figura 67 – Manipulação da aluna B	66
Figura 68 – Representação da operação $44+18$	67
Figura 69 – Manipulação do aluno F	67
Figura 70 – Resolução do aluno D	69
Figura 71 – Manipulação do aluno C	69
Figura 72 – Situação problemática criada pelo aluno D	69
Figura 73 – Manipulação do aluno D.....	70
Figura 74 – Resolução do aluno A	70
Figura 75 – Resolução da aluna B.....	70
Figura 76 – Resolução do aluno C	71
Figura 77 – Resolução do aluno D	71
Figura 78 – <i>Base Blocks</i>	121
Figura 79 – <i>Base Blocks Addition</i>	121
Figura 80 – <i>Base Blocks Subtraction</i>	121
Figura 81 – Folha de exploração	122
Figura 82 – Reta numérica em GeoGebra	123
Figura 83 – <i>Base Blocks Subtraction</i>	124
Figura 84 – <i>Applet</i> subtração reta numérica.....	125
Figura 85 – <i>Applet</i> subtração reta numérica.....	125
Figura 86 – <i>Base Blocks Addition</i>	126

1. INTRODUÇÃO

O presente relatório foi elaborado para a conclusão do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo de Educação Básica (CEB) e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB. Este documento, consubstancia-se e dá sequência ao quadro normativo que regulamenta o regime jurídico de habilitação para a docência (Decreto – Lei n.º 79/2014 de 14 de maio), nomeadamente ao n.º 2 do artigo 11.º, que determina que o estágio de natureza profissional (Prática de Ensino Supervisionada) seja objeto de um relatório final. Deste modo, o documento reporta-se ao trabalho desenvolvido durante as unidades curriculares de Prática Educativa I e II do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB.

O estágio realizado em Prática Educativa I teve lugar junto de uma turma do 1.º ano do 1.º CEB com 26 alunos. Este período de prática de ensino supervisionada realizou-se em regime de par pedagógico, durante o qual a professora titular de turma desempenhou o papel de orientadora cooperante, cabendo ao professor da unidade curricular a função de supervisão pedagógica. O estágio no 2.º CEB, parte integrante da unidade curricular Prática Educativa II com duas vertentes – Matemática e Ciências Naturais – realizou-se junto de duas turmas do 6.º ano. Também em regime de par pedagógico, o papel de orientadora cooperante ficou a cargo das professoras responsáveis pelas disciplinas de Matemática e Ciências Naturais, enquanto a supervisão pedagógica foi da responsabilidade da díade de professoras responsáveis por cada uma das duas áreas do conhecimento abrangidas pela unidade curricular Prática Educativa II.

A prática supervisionada é uma fase de extrema importância na formação pessoal e profissional de um professor. A colaboração entre profissionais experientes e os aspirantes a professor - numa dinâmica que se deseja eficaz e exigente a nível organizacional, operacional e teórico - pressupõe que, tanto o supervisor como o orientador cooperante reconheçam e analisem as perceções e dificuldades do futuro professor. De igual modo, devem também facultar o apoio e orientação necessária à compreensão e resolução dessas mesmas dificuldades, encaminhando o aluno para uma atitude reflexiva da sua prática.

Caires e Almeida (2003, p.148, como referido em Jesus, 2011), apresentam alguns objetivos a alcançar com esta unidade curricular: “(1) permitir aplicar as competências e conhecimentos adquiridos ao longo do curso de formação inicial; (2) aumentar as competências e conhecimentos por meio da experiência prática; (3) criar e fundamentar o compromisso com a carreira profissional; (4) identificar as dificuldades e facilidades (pessoais e profissionais) no campo de trabalho; e (5) proporcionar uma visão realista da profissão e da sua prática” (p. 18). Sá-Chaves (2002, como referido em por Gonçalves, Sanches & Martins, 2013, p.1307) defende que no processo de supervisão pedagógica

se trata sempre de prática acompanhada, interativa, reflexiva e colaborativa que tem como objetivo contribuir para desenvolver no candidato a professor o quadro de valores, de atitudes, de conhecimentos, bem como as capacidades e as competências que lhe permitam enfrentar com progressivo sucesso as condições únicas de cada ato educativo. Constituindo a prática profissional um espaço de grande complexidade em que os alunos têm, naturalmente, dificuldade em operacionalizar e racionalizar sozinhos, cabe ao supervisor ou equipa de supervisão ajudar o formando a compreender a realidade (p. 167).

Nesta etapa da formação estreitam-se um conjunto de relações interpessoais e institucionais do formando. Desde o modo de interagir e criar laços com os alunos, até como participar no processo de aprendizagem e desenvolvimento holístico destes, que postura adotar, como se relacionar com os pais, a escola e a restante comunidade educativa, entre outras. Estas competências podem ser desenvolvidas por meio de diversas atuações, incluindo a observação, a análise e a responsabilização pela atividade do professor no contexto escolar.

Ao contactar com a dimensão curricular do ensino, os formandos, com o auxílio dos demais atores, enfrentam problemas concretos e reais e assumem a prática da planificação em sala de aula. Este é, na opinião do mestrando, o momento ideal para tentar explorar práticas inovadoras, que fazem emergir novas competências (ou acentuam competências reconhecidas), prioritárias na evolução das formações iniciais e contínuas, que colocam a criança no centro da ação pedagógica, e que como refere Perrenoud (2000), contribuem para a luta contra o fracasso escolar e desenvolvem a cidadania e a participação e responsabilidade social. Quando assume um papel ativo na sua formação contínua, usufruindo ao máximo do suporte científico e experiência

profissional do supervisor e orientador cooperante, o professor estagiário (PE) pode valorizar as competências promovendo a prática reflexiva (Viseu & Ponte, 2012).

É nesta ordem de ideias que a prática reflexiva é encarada como uma ferramenta que permite conciliar os saberes teóricos da formação académica e os saberes da prática pedagógica. Estes momentos de formação prática são extremamente valiosos para o PE, já que possibilitam experienciar métodos e técnicas diferentes daqueles que conhece como aluno, alargando o leque de experiências que pode incluir no seu desempenho docente (Formosinho, 2009, como referido em Teixeira, 2013). Ghedin, Oliveira & Almeida (2015), na sua procura da relação que articula estágio com o processo de pesquisa, assumem que o “conceito de professor reflexivo é interdependente do conceito professor-pesquisador” (p. 37). No entanto, investigar a própria prática, não é uma tarefa fácil para o professor que assume este caminho, sobretudo com a sobrecarga que a faceta de investigador acresce ao papel de professor. A colaboração e discussão crítica com pares, professores universitário e investigadores, torna o trabalho de investigação mais produtivo e enriquecedor para todos os participantes (Fiorentini, 2012; Quaresma, Ponte, Baptista, & Mata-Pereira, 2014).

É importante que o contributo dos professores em investigações sobre a prática docente não se limite ao fornecimento e produção de dados (Lüdke & da Cruz, 2013). Os resultados do estudo de Van Zoest (2006) sobre o envolvimento de professores em atividades de investigação, apontam no sentido de a atividade investigativa ter impacto direto nas suas conceções de ensino e de aprendizagem, além de provocar mudanças nas suas práticas de sala de aula. Ao investigarem a própria prática, fundamentar e aprofundar essa relação (Fino, 2011), durante a formação inicial ou formação continuada (Gatti, 2017), contribuem para o seu desenvolvimento profissional (Fiorentini & Crecci, 2013). A formação do professor pesquisador, quando reformulada a partir do estágio com componente investigativa, contribui para a sua educação científica e facilita a ligação entre as aprendizagens da formação teórica com a prática letiva no quotidiano da sala de aula (Ramos, 2005; Barroncas de Oliveira & Menezes Gonzaga, 2012).

A estrutura deste relatório é dividida em três partes, iniciando-se com a corrente introdução, onde é feito um enquadramento das práticas pedagógicas realizadas, assim como da importância destas na formação do PE. O capítulo seguinte contempla uma componente investigativa – integrada no estágio realizado em Prática Educativa I, junto de uma turma do 1.º ano do 1.º CEB –, cujo foco incide sobre a temática da integração de manipulativos virtuais, usando a Modelação Matemática como ambiente de aprendizagem (MMCAA), na compreensão dos sentidos da adição e da subtração.

No terceiro capítulo, componente reflexiva deste relatório, é feita uma análise crítica sobre a prática pedagógica implementada no 1.º CEB e no 2.º CEB, bem como do seu contributo para o desenvolvimento profissional do mestrando, na perspetiva do professor reflexivo, em permanente aprendizagem.

2. COMPONENTE INVESTIGATIVA

2.1 Introdução

Neste subcapítulo expõe-se uma introdução ao estudo realizado, apontando a sua motivação e problema de investigação, os objetivos que orientaram a investigação e a justificação da sua pertinência. Seguidamente, descreve-se a forma como o estudo está organizado.

2.1.1. Motivação e formulação do problema

No contexto da prática pedagógica supervisionada a observação é um instrumento de aprendizagem e crescimento pessoal e profissional, que permite a obtenção de dados que possibilitam uma interpretação contextualizada de comportamentos (Estrela, 1994).

Foi com base na observação, na sua maioria observação participante (Cohen, Manion, & Morrison, 2007), realizada no âmbito da Prática Supervisionada em 1.º CEB, que foram observadas na turma dificuldades na resolução de tarefas relacionadas com os sentidos da adição e subtração, particularmente evidentes na correção dos trabalhos de casa e em fichas de trabalho, ou seja, em tarefas predominantemente individuais. Foi ao aperceber-se das dificuldades observadas nos alunos e atrás referidas, que o PE se questionou acerca da forma como poderia contribuir para melhorar a compreensão nestes dos sentidos da adição e da subtração, tendo neste contexto, emergido o problema: que artefactos se podem usar e que práticas de sala de aula se podem implementar para promover nos alunos a compreensão dos sentidos da adição e da subtração?

O primeiro passo deste estudo foi dado no sentido de compreender melhor o que diz a literatura sobre educação matemática acerca dos processos de ensino e de aprendizagem matemática relacionados com a problemática da investigação, de forma a traçar uma estratégia de ação e escolher os artefactos e práticas de sala de aula mais apropriados.

A compreensão é um aspeto fundamental na aprendizagem da matemática (NCTM, 2007; NCTM, 2014). Deste modo, o documento normativo que rege o ensino e aprendizagem da Matemática no 1.º CEB recomenda uma educação matemática onde

diz estar implícita a intenção de promover e aprofundar a compreensão, objetivo fundamental do ensino (Bivar, et al., 2013a).

Por outro lado, a utilização de situações problemáticas próximas das vivências dos alunos, com um sentido e oportunas do ponto de vista do aluno, facilita a aprendizagem da matemática (Pólya, 2014). A resolução de situações problemáticas deve ser um dos objetivos da aprendizagem matemática, assumindo-se como um meio através do qual os alunos aprendem matemática, possibilitando também a oportunidade de sistematizar e ampliar os seus conhecimentos (NCTM, 2007; NCTM, 2014). Assim, dando continuidade a esta linha de pensamento, a Modelação Matemática é propícia ao desenvolvimento da capacidade de mobilizar conhecimentos matemáticos em situações problemáticas que traduzam situações reais, condição favorável à ocorrência de aprendizagens significativas (Blum & Niss, 1991; Ferri & Blum, 2013). A MMCAA potencia a construção do conhecimento matemático (Rosa & Orey, 2012), auxiliando o aluno na compreensão dos argumentos matemáticos e na apropriação de conceitos e resultados, favorecendo uma visão positiva da matemática (Bassanezi, 2002); possibilita aos alunos obter conhecimentos procedentes de várias fontes, “disponibilizando-os e representando-os em forma de modelos” (Rosa & Orey, 2012, p. 275), podendo também as operações aritméticas assumir o papel de modelo (Usiskin, 2007).

O uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC) na aprendizagem, sobretudo se olhado do ponto de vista da ação do aluno sobre as situações problemáticas e em tarefas de natureza cooperativa, é também uma dimensão com importante e positivo contributo na aprendizagem dos alunos, na medida em que: acrescenta motivação nos alunos para a aprendizagem; fomenta o envolvimento com ideias matemáticas abstratas, incluindo as suas próprias; auxilia a aprendizagem através do feedback imediato e proporciona um contexto para discussões matemáticas, entre alunos e professores, sobre os objetos e conceitos que transforma de forma dinâmica (NCTM, 2007). Deste modo, o uso dos computadores no contexto da MMCAA, contribui para que os alunos estabeleçam múltiplas conexões matemáticas, incitando o desenvolvimento holístico da compreensão matemática (Peard, Ralph, & Muller, 2007) e dos seus conceitos (Confrey & Maloney, 2007).

É neste enquadramento que os manipulativos virtuais aproximam dos alunos linguagens e significados – desde que esta prática seja parte integrante de um processo reflexivo discente, orientado pelo professor, com o intuito de auxiliar os alunos perceberem o contributo dos manipulativos na resolução de situações problemáticas e comunicação matemática (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2012). O recurso a manipulativos virtuais permite aos alunos testar e validar hipóteses no ecrã, sem recear feedback negativo dos pares ou dos professores, esta experimentação pode encorajar os alunos a estabelecer conexões entre os conceitos e as representações virtuais (Suh, Moyer, & Heo, 2005). Num ambiente tecnológico dinâmico, em que os professores têm oportunidade de observar os alunos concentrando-se nos seus raciocínios e processos, aumenta a quantidade de informação à disposição dos professores para poderem tomar decisões referentes ao processo de ensino (NCTM, 2007).

Considerando o que acima foi dito, durante a busca de artefactos e práticas de sala de aula que possam promover a compreensão dos alunos relativamente aos sentidos da adição e da subtração chegou-se ao problema de investigação: de que forma a integração dos manipulativos virtuais nas práticas de sala de aula, usando a Modelação Matemática como ambiente de aprendizagem, gera impactes positivos na construção do conhecimento dos alunos relacionado com a promoção do desenvolvimento dos sentidos da adição e da subtração?

2.1.2. Objetivos de investigação

Atendendo a todos os aspetos considerados como fundamentais no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, dificuldades dos alunos e contexto do grupo e das suas rotinas de sala de aula – onde as TIC eram presença habitual, com maior destaque para o processador de texto e o quadro interativo –, formularam-se os seguintes objetivos da investigação:

- i) mapear dificuldades dos alunos relacionadas com os sentidos da adição e da subtração;
- ii) analisar o impacto da integração de manipulativos virtuais, usando a MMCAA, na compreensão dos sentidos da adição e da subtração.

2.1.3. Pertinência do estudo

Os alunos do 1.º Ano do 1.º CEB fazem parte da geração dos chamados Nativos Digitais (Prensky, 2001; Thompson, 2013); assim, uma vez que as TIC fazem parte da sua vivência diária, estas não podem ficar à porta da sala de aula. O papel das tecnologias na educação matemática (Clements, 1999; NCTM, 2007; Monteiro & Loureiro, 2009; Mota, & Coutinho, 2011; Leppisaari & Vainio, 2015) contribui positivamente para o processo educativo, trazendo o aluno para o centro das atividades, permitindo-lhe participar de forma significativa e ativa na construção das suas aprendizagens. Fino (1999) refere que a interação de indivíduos entre si e com o mundo é mediada por artefactos e por ferramentas culturais e socialmente construídas – tal como o software: ferramenta que possibilita a interação entre aluno e computador (Arrais, Martins, & Grossi, 2012).

É clara a importância dos materiais manipuláveis na literatura (Bruner, 1976; Post, 1981; Hynes, 1986; Ponte & Serrazina, 2000; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Moyer, 2001; Vale, 2002; Nacarato, 2005; Kelly, 2006; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2012; Botas & Moreira, 2013; Vale & Barbosa, 2014); no entanto, estes objetos concebidos para representar de modo explícito ideias matemáticas não se limitam à dimensão física. Clements (1999) propõe alargar o conceito de materiais concretos, incluindo nele para além da natureza sensorial do objeto físico, o software educativo. É com base nesta última dimensão do conceito de materiais concretos que utilizamos no estudo os designados “manipulativos virtuais” – ferramenta que vem ganhando relevo na educação matemática (Carreira, 2009; Freitas & Paiva, 2006; Braga, 2013; Hoffmann, Martins, Serres, & Basso, 2010; Suh J. M., 2005; Suh, Moyer, & Heo, 2005; Pratas, Rato, & Martins, 2016; Sarama & Clements, 2016; Santos & Santos, 2017).

No recente PISA 2015-Portugal é sugerido o uso da Modelação Matemática como uma das estratégias para o processo de Formular Matematicamente as Situações (Marôco, Gonçalves, Lourenço, & Mendes, 2016). O uso da MMCAA, ao recorrer a contextos reais, estimula a envolvimento ativo dos alunos nas tarefas, criando condições para aprendizagens significativas (Barbosa, 2001; Barbosa, 2003; Barbosa, 2003a; de

Miranda & Laudares, 2009; Oliveira, 2010; Rosa & Orey, 2012; Martins, Vieira, Reis, & Ribeiro, 2013; Viseu & Menezes, 2014).

No seu trabalho sobre investigação em educação matemática em Portugal, além de fazer um levantamento sobre estudos relevantes, Ponte (2008) procura caraterizar a investigação em educação matemática em Portugal, diferenciando-a em três grandes ideias: 1) perspetiva curricular; 2) foco ou objeto de estudo; 3) aspetos teóricos e às metodologias de investigação. Na primeira categoria, que intitulou assumir uma perspetiva curricular inovadora, inclui, entre outros aspetos, “desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, o uso da Matemática em situações contextualizadas, a valorização do espírito crítico e da autonomia dos alunos (...), o uso da tecnologia, o trabalho de grupo, a comunicação escrita e a discussão coletiva na sala de aula” (Ponte, 2008).

Em síntese, considera-se que este estudo é pertinente, porque: i) procura dar resposta a uma dificuldade do grupo; ii) o problema de investigação e opções metodológicas vão ao encontro das sugestões da comunidade científica; iii) existe ainda pouca investigação sobre esta temática em Portugal.

2.1.4. Estrutura da Componente Investigativa

O capítulo componente investigativa encontra-se dividido em seis subcapítulos, sendo o primeiro dos quais a presente introdução.

O segundo contém o marco teórico relevante para a temática em estudo, e problemática de investigação em particular. Organizado em três secções distintas, na primeira secção apresenta-se o conceito de MMCAA, partindo de uma caraterização do que se entende por Modelação Matemática e as suas principais características. A secção seguinte diz respeito à compreensão dos sentidos da adição e da subtração, onde para além de discutir a presença deste conteúdo matemático nas orientações curriculares e as indicações para o ensino e aprendizagem desta temática em documentos de referência, são também apresentados estudos recentes e os seus principais resultados. A terceira secção enquadra o uso de manipulativos virtuais no ensino e aprendizagem da matemática, com maior relevo para a compreensão dos sentidos da adição e

subtração. Alicerçada a esta secção, encontra-se o último ponto do enquadramento teórico, onde se estabelecem relações entre o uso de manipulativos virtuais e a MMCAA.

O terceiro subcapítulo apresenta as opções metodológicas gerais, a caracterização dos participantes do estudo, a descrição das fases de intervenção, dos instrumentos de recolha de dados e o modo como estes foram analisados. Os dados recolhidos são tratados no quarto subcapítulo, incidindo nos sentidos da adição (juntar e acrescentar) e da subtração (retirar, completar e comparar), discutindo-se os resultados no subcapítulo seguinte. A componente investigativa encerra com o subcapítulo seis, dedicado às conclusões, que serão alvo de síntese e reflexão final.

2.2 Revisão da Literatura

2.2.1 Modelação Matemática como ambiente de aprendizagem

Historicamente, é na década de 1960 que se inicia a discussão em torno da modelação e do seu contributo para a Educação Matemática, “com um movimento apelidado de «utilitarista», centrado na aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade, que impulsionou a formação de grupos de investigação sobre o tema” (Pais, 2011, p. 30). Na Europa destacam-se dois grupos: o Instituto para o Desenvolvimento da Educação Matemática, coordenado de Hans Freudenthal, a par de outro, coordenado por Bernhelm Booss e Mogens Niss, já nos EUA, no 69.º anuário da National Society for the Study of Education, publicado em 1970, onde se encontra um capítulo em que Henry Pollack descreve o processo de Modelação Matemática, ainda que não recorra a esta terminologia (Biembengut, 2009). Decorreu em Roskilde, no ano de 1978, um congresso dedicado ao tema Matemática e Realidade, passo importante para o estabelecimento em 1983 do Grupo Internacional de Ensino de Modelação Matemática e Aplicações (ICTMA) (Biembengut, 2009; Pais, 2011). Mais recentemente, a relação entre Modelação Matemática e processo de ensino e de aprendizagem tem vindo a ser mais estudada pela comunidade científica (Biembengut, 2009; Pais, 2011; Silva & Kluber, 2012).

A prática de criar modelos e refletir sobre eles recorre a instrumentos materiais e intelectuais; quando os instrumentos são matemáticos, essa prática designa-se por Modelação Matemática (D'Ambrosio, 2009). Trabalhar com Modelação Matemática, implica partir de um problema real que seja significativo para os alunos e suas comunidades (Meyer, Caldeira, & Malheiros, 2011). Cria oportunidades de aprendizagens significativas, uma vez que desenvolve nos alunos a capacidade de mobilizarem os conhecimentos matemáticos em situações problemas que espelhem situações reais, permitindo a compreensão e interpretação crítica do meio envolvente, assim como experienciar a aplicabilidade da matemática à sociedade (Blum & Niss, 1991). Todos estes aspetos são corroborados por estudos realizados por Caseiro e Ribeiro (2012), Fernandes e dos Santos Junior (2012), Castro, Santana, Neto e Órfão (2013), Sostisso (2014); Renz Junior (2015) Stohlmann et al. (2016); Stillman, Blum e Kaiser (2017).

Deste modo, a Modelação Matemática é um processo que consiste na tradução de situações problemáticas com génese no quotidiano ou de outras áreas do conhecimento, desde que sejam significativas para os alunos, através da linguagem simbólica da Matemática, suscitando a necessidade de usar um conjunto de símbolos ou relações matemáticas – Modelo Matemático – para representar ou organizar a situação problemática proposta, de forma a compreendê-la ou solucioná-la (de Almeida, de Loiola Araújo, & Bisognin, 2011). Biembengut e Hein (2000, citados por Carvalho e Silva & Sant'Ana, 2002) referem que a Modelação Matemática “é o processo que envolve a obtenção de um modelo”, em consonância com o entendimento de Matos (1995) do que é a Modelação Matemática: “um processo que tem origem num dado fragmento da realidade e que culmina na construção de um modelo matemático dessa realidade” (p. 18). Blum e Ferri (2009) apresentam uma definição mais concisa, ao descreverem Modelação Matemática como um processo de tradução bidirecional entre o mundo real e a matemática.

É possível encontrar diferentes diagramas para a representação do processo de Modelação Matemática na literatura, no entanto, na maioria, é possível reconhecer semelhanças com um diagrama disponibilizado inicialmente nos materiais de apoio da Open University do Reino Unido (Galbraith & Stillman, 2006).

Para Biembengut (2014) o processo de Modelação Matemática é composto por três fases sequenciais: (F1) Perceber e apreender; (F2) Compreender e explicitar e (F3) Significar e expressar.

A proposta de Ponte (1992) apresenta uma estrutura semelhante a um ciclo (Figura 1), em que para se traduzir uma situação da vida real por um modelo matemático o primeiro passo é definir em que consiste o problema, seguido pela escolha da a estrutura matemática para o representar, para que na etapa seguinte se utilizem as ferramentas matemáticas na análise do problema, chegando-se assim a conclusões, que devem ser confrontadas com o quadro da situação real. A avaliação do modelo pode implicar a sua reformulação, ou a construção de um novo, que permita uma visão mais aprofundada da situação em estudo. Uma vez validado, a análise do modelo pode sugerir novas relações, propriedades e aspetos da situação real, indicando a direção de uma nova procura de dados, originando um novo ciclo de Modelação Matemática.

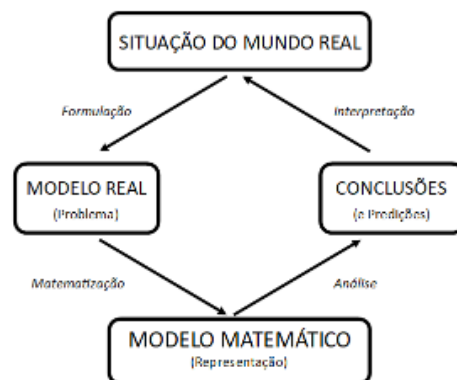


Figura 1 - Ciclo de Modelação Matemática (Ponte, 1992)

Galbraith e Stillman (2006) apresentam uma representação do processo de Modelação Matemática (Figura 2). As entradas A-G representam etapas no processo de modelação, onde as setas a bold indicam transições entre as etapas; um ciclo de Modelação Matemática considera-se bem-sucedido quando a avaliação do modelo evidenciar que a solução, quando confrontada com a situação real, é válida. Quando a avaliação do modelo força a sua revisão, o ciclo retoma-se na etapa B, percorrendo as restantes etapas até se concluir com sucesso o ciclo. Este processo de Modelação Matemática não é linear ou unidirecional, as setas no sentido anti-horário enfatizam isso mesmo, servindo também o propósito de destacar a presença de atividade

metacognitiva durante todo o processo, bem como a relação de interdependência de todas as etapas.

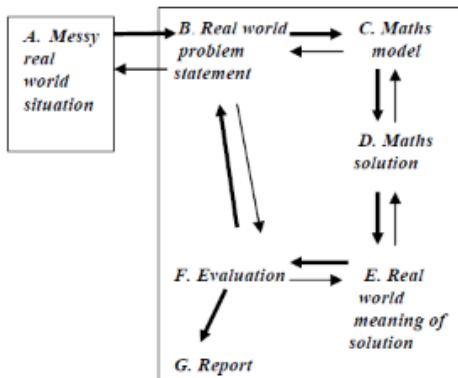


Figura 2 – Processo de modelação (Galbraith & Stillman, 2006)

Com uma outra proposta, Ferri (2006) sugere um processo de Modelação Matemática com 6 etapas (Figura 3), tendo por base a evolução do modelo de Blum e Leiss (2005). A diferenciação de fases deste ciclo de Modelação Matemática permite descrever e reconstruir essas mesmas fases de forma empírica Ferri (2006), que podem ser descritas resumidamente da seguinte forma:

- i. começar com um problema do mundo real;
- ii. trabalhar a partir de questões-chave e reconstruir mentalmente a situação real. Esta transição pode ser muito variada, dependendo do estilo de pensamento matemático do indivíduo – recriações imagéticas com fortes associações a experiências próprias prévias ou incide mais em números e dados do problema que o indivíduo quer associar ou relacionar;
- iii. a transição da representação mental para o modelo real implica que o problema faça sentido através de uma idealização ou simplificação, dependendo do tipo de problema, podendo surgir a necessidade de conhecimento extra-matemático (CEM). O modelo real é construído a nível interno, o que quer dizer que a o modelo pode também ter representações externas (ex. fórmulas, desenhos ou esquemas);
- iv. transição do modelo real para o modelo matemático: processo de matematização em que o CEM é necessário para que a representação externa do modelo se expresse mais ao nível matemático – através de fórmulas, expressões matemáticas, esquemas, diagramas, etc. –, menos ao nível da situação real;

- v. a passagem do modelo matemático para os resultados matemáticos é conseguida recorrendo às competências matemáticas do indivíduo. Os resultados matemáticos, na maioria das vezes, limitam-se ao registo dos resultados obtidos com base no modelo matemático;
- vi. a interpretação dos resultados ocorre durante a transição dos resultados matemáticos para os resultados reais. Os resultados matemáticos são discutidos pelos indivíduos, com o objetivo de aferir se podem ou não ser resultados reais;
- vii. o último passo é dado com a validação dos resultados reais, através de uma correspondência entre os resultados reais e a representação mental da situação, podendo ocorrer ou não. A validação pode assumir duas formas, validação intuitiva ou validação baseada em conhecimento. O ciclo é iterativo: caso não ocorra validação, inicia-se um novo ciclo.

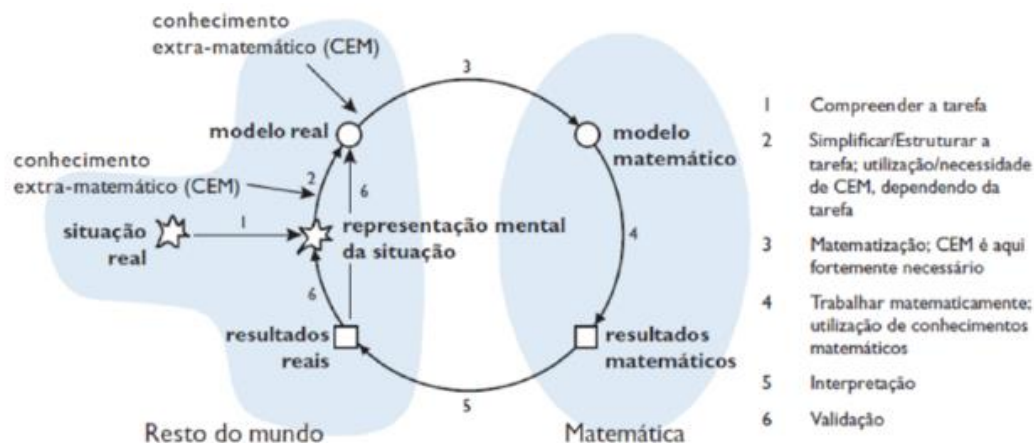


Figura 3 – Ciclo da Modelação Matemática (Ferri, 2010)

De acordo com Ferri (2010), uma boa tarefa de Modelação Matemática, além de os alunos aprenderem a percorrer todo o ciclo de Modelação Matemática, a construção e implementação de tarefas de modelação obedece a cinco critérios: 1) *Significado da tarefa de modelação*; 2) *Contexto realista adequado à idade*; 3) *Provocação de questões*; 4) *Estimulação de formas holísticas de aprendizagem* e 5) *Nível de linguagem adequado*.

Ainda que este estudo relacione Modelação Matemática e resolução de problemas, não é nossa intenção sugerir o uso de ambas em simultâneo, são metodologias com características particulares e complexas. A Resolução de problemas (Pólya, 1995) surge

aqui como ferramenta auxiliar, parte integrante do ciclo de Modelação Matemática, e é nesse contexto que a importa caraterizar.

Resolução de problemas refere-se ao processo de trabalhar uma situação problemática na tentativa de encontrar uma solução (Blum & Niss, 1991), não bastando, no entanto, compreender a linguagem, símbolos e palavras presentes. Pólya (1995), descreve um modelo para a resolução de problemas, *How to Solve It*, que consiste em quatro fases: i) compreensão do problema; ii) estabelecimento de um plano; iii) execução do plano; iv) examinar a solução obtida. Adequando o modelo de Pólya ao 1.º CEB, Boavida et al. (2008, p. 22) sugerem um modelo simplificado para a resolução de problemas: i) ler e compreender o problema; ii) fazer e executar um plano; iii) verificar a resposta. Os mesmos autores defendem que a resolução de problemas é “uma oportunidade de envolver os alunos, desde muito cedo, em questões de modelação matemática que, tradicionalmente, são consideradas como tópicos de Matemática mais avançada” (2008, p. 14).

A Modelação Matemática é um processo que permite interpretar e modelar uma situação problemática com origem num contexto real, transformando-a numa situação problemática matemática, cuja solução é interpretada com a linguagem do contexto real que a originou (Bassanezi, 2002; Biembengut, 2009). Se “tivermos boas tarefas de modelação que apresentem um problema ou uma situação da realidade e se a matemática for necessária para resolver esse problema, então podemos falar de modelação matemática” (Ferri, 2010).

Ao tornar a Modelação Matemática parte integrante da educação matemática, criam-se ambientes de aprendizagem (D'Ambrosio, 2009), onde os professores, enquanto mediadores do processo educativo, “auxiliam os alunos a externalizarem o conhecimento matemático tácito através de atividades pedagógicas contextualizadas, como por exemplo, a elaboração de modelos matemáticos” (Rosa & Orey, 2012). No mesmo sentido apontam Chaves, Espírito Santo e Souza (2015), ao afirmarem que a Modelação Matemática é geradora de ambientes de aprendizagem onde “os conteúdos matemáticos podem ser conduzidos de forma articulada com outros conteúdos, de

diferentes áreas do conhecimento, contribuindo dessa forma, para que se tenha uma visão holística (global) do problema em investigação” (p.15).

Estes processos de Modelação Matemática são coerentes com a noção de ambiente de aprendizagem proposta por Skovsmose (2000), onde os alunos têm um papel ativo nas atividades propostas. No caso da MMCAA, existem algumas características que o tornam particular e distinguem de outros ambientes de aprendizagem. Para Barbosa (2003) este, é um ambiente de aprendizagem onde os alunos exploram situações com referência na realidade, usando a matemática como mediador, através da problematização e da investigação.

Na prática de ensino, para estabelecer conexões entre atividades matemáticas da sala de aula e o mundo real, recorre-se principalmente a *wordproblems*. Além de representar a interação entre a matemática formal e a realidade, os *wordproblems* são, muitas vezes, o único meio de proporcionar aos estudantes oportunidade de experienciar os princípios básicos de matematização e Modelação Matemática (Bonotto, 2011). A resolução de tarefas de Modelação Matemática contribui para a promoção de aprendizagens efetivas, alavancando os alunos para um nível de raciocínio superior, para tal, é importante que as tarefas propostas pelos professores sejam verdadeiramente desafiadoras (Ribeiro, 2010). Alguns estudos, nomeadamente os de Machado Júnior (2005), Barbosa (2009), Aragão e Oliveira (2012), Campos e Araújo (2015), Sousa (2015) e Freitas (2016), referem o contributo positivo do uso da MMCAA na construção de conhecimento discente e docente, particularmente na construção de aprendizagens significativas pelos alunos, no estabelecimento de conexões entre a matemática funcional e a matemática curricular e a valorização do professor reflexivo no processo de ensino e de aprendizagem.

2.2.2 Sentidos das operações

Os documentos curriculares que regulam o ensino da Matemática no 1.º ano do 1.º CEB oferecem orientações concisas no que respeita aos sentidos das operações adição e subtração. O programa de matemática para o 1.º CEB (Bivar, et al., 2013a) remete os sentidos da adição (juntar e acrescentar) e da subtração (retirar, comparar e

completar) para o domínio *Números e Operações* (NO1). Assim, é integrado no conteúdo *Adição* que surge a indicação para que os sentidos desta operação sejam abordados através de “Problemas de um passo envolvendo situações de juntar e acrescentar”. De forma análoga, é no conteúdo *Subtração* que estão presentes os sentidos da operação, enquadrados em “Problemas de um passo envolvendo situações de retirar, comparar ou completar”.

As disposições programáticas encontram continuidade nas metas curriculares (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013b). É no domínio *Números e Operações* (NO1) que se encontram os descritores relativos aos sentidos da adição e da subtração, organizados como se vê no quadro abaixo:

Quadro 1 – Metas curriculares relativas aos sentidos da adição e subtração

<i>Subdomínio</i>	<i>Adição</i>	<i>Subtração</i>
<i>Objetivo Geral</i>	4. Resolver problemas	6. Resolver problemas
<i>Descritor</i>	1. Resolver problemas de um passo envolvendo situações de juntar ou acrescentar.	1. Resolver problemas de um passo envolvendo situações de juntar ou acrescentar.

Ao ser confrontado com uma situação problemática, para que o aluno seja capaz de optar de forma consciente pela operação a utilizar, precisa de entender os sentidos envolvidos na situação e conhecer os sentidos das operações à sua disposição (Loureiro, 1997). A pesquisa bibliográfica realizada sobre os sentidos associados às operações adição e subtração devolveu diferentes classificações, dependendo dos seus autores.

Nas suas investigações sobre a resolução de situações problemáticas de adição e subtração, Carpenter e Moser (1983; 1984) e Fuson (1992) encontraram uma estrutura similar para os tipos de situações problemáticas que correspondem a diferentes significados da adição e da subtração. Carpenter e Moser (1983) indicam mudar, combinar, comparar e tornar igual, enquanto Fuson (1992) oferece uma classificação organizada em mudar juntando e mudar tirando de, comparar e combinar. O mesmo autor revisita e expande a sua proposta de classificação para os sentidos das operações de adição e subtração (2003), tendo em conta as seguintes variantes: *Change-Add-To*; *Change-Take-From*; *Combine: Put Together/Take Apart*; *No Action*; *Compare More* e *Compare Less/Fewer*.

Lieven Vershavel e Erik De Corte (1996), sugerem uma classificação para as situações de adição e subtração compartimentada em três categorias: mudança, combinação e comparação. A taxionomia de Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) para os sentidos da adição e subtração, que assenta nas relações e ações presentes nas situações problemáticas que conferem estes significados, apresenta as classes juntar, separar, relação parte-parte-todo e relações de comparação – esta classificação ramifica as diferentes classes, de acordo com a quantidade que é desconhecida.

Por seu lado, Ponte e Serrazina (2000) reconhecem cinco significados diferentes para as operações adição e subtração, associando mudar juntando e combinar à adição, conotando com a subtração, mudar tirando, comparar e tornar igual. Treffers e Buys (2001) associam a adição a situações problemáticas com o significado juntar e acrescentar, à subtração associam situações de retirar, diferença, comparar e completar. Muito próxima da classificação de Treffers e Buys, Cardoso (2005) apresenta os sentidos de juntar e acrescentar para a adição, e tirar, completar e comparar para a subtração. A sugestão de classificação de Ramos (2009) apresenta os sentidos reunir, juntar e acrescentar para a operação adição; no que diz respeito à subtração, retirar, completar e comparar são os sentidos propostos.

Parker e Baldrige (2004) referem apenas um sentido para a adição – combinar –, considerando para a subtração os sentidos parte-todo, retirar e comparar. Para Aharoni (2008) o significado da adição é a união de dois grupos, o da subtração é a remoção. Numa proposta de classificação bastante próxima da de Parker e Baldrige (2004), Aharoni (2008) indica apenas um sentido para a adição – juntar –, ainda que considere duas formas diferentes de adição: a dinâmica e a estática. Quanto à subtração, assinala três sentidos distintos: retirar, separação de um todo em partes e comparação.

Este estudo procurou respeitar as orientações curriculares relativas aos sentidos da adição e da subtração. No entanto, uma vez que os autores do Programa e Metas Curriculares (Bivar et al., 2013) não esclarecem o que entendem por cada um dos sentidos (juntar, acrescentar, retirar, completar e comparar), atendendo aos exemplos de situações problemáticas que constam no Caderno de Apoio 1.º Ciclo (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012), optou-se por seguir a classificação proposta por

Ponte e Serrazina (2000), uma vez que se aproxima do que consta no Programa e Metas Curriculares para o ensino Básico. Desta forma, foi feita a leitura que consta no quadro abaixo:

Quadro 2 – Sentidos da adição e da subtração

	ORIENTAÇÕES CURRICULARES	PONTE E SERRAZINA	SIGNIFICADO
ADIÇÃO	Juntar	Combinar	Duas ou mais quantidades são transformadas noutra quantidade.
	Acrescentar	Mudar juntando	Uma quantidade é aumentada.
SUBTRAÇÃO	Retirar	Mudar tirando	A uma quantidade é retirada outra. É calculado quanto se deverá juntar a uma quantidade para se obter um determinado valor.
	Completar	Tornar igual	São comparadas duas quantidades, pretendendo-se encontrar a diferença entre as quantidades ou ver quanto é que uma é maior ou menor que outra.
	Comparar	Comparar	

A investigação feita sobre os sentidos das operações adição e subtração (Martins, 2011; Morais, 2011; Ferreira, 2012; Pinto, 2014; Vieira, 2016; Sousa, 2016; Castelhana, 2016; Martins, 2016), assenta, na sua maioria, na resolução de problemas, na procura de compreensão das estratégias usadas na sua resolução pelos alunos e mapeamento das principais dificuldades apresentadas por estes. Partindo também da resolução de problemas, Reis (2014) debruça-se sobre o desenvolvimento da comunicação matemática e à semelhança dos anteriores estudos assinala a resolução de problemas como promotora da compreensão dos sentidos da adição e da subtração. Silva (2010) analisou a forma como evoluem os sentidos das operações adição e subtração ao longo da realização de tarefas de investigação na sala de aula, concluindo que esta estratégia permitiu aos alunos ampliar as suas competências e aplicá-las a situações novas.

2.2.3 Manipulativos virtuais

Um currículo excecional de matemática integra o uso de ferramentas matemáticas e tecnologia como recursos essenciais, que ajudam os alunos a aprender e a compreender ideias matemáticas, raciocinar matematicamente e comunicar o seu pensamento

matemático (NCTM, 2014). Para tal, é importante que os alunos tenham acesso regular a tecnologias que apoiem e avancem a criação de sentido matemático, raciocínio, resolução de problemas e comunicação matemática (NCTM, 2011).

É cada vez maior a presença das TIC no processo de ensino e de aprendizagem, desde materiais de apoio facultados pelas editoras de manuais escolares – laboratórios virtuais, versões digitais dos manuais, ficheiros multimédia, etc. –, a recursos on-line criados por investigadores, especialistas em educação e instituições de ensino superior. No entanto, a plataforma da tecnologia é menos importante do que a funcionalidade que fornece. A integração da tecnologia no processo de ensino e de aprendizagem não só altera a forma de ensinar, mas também afeta o que pode ser ensinado, proporcionando em simultâneo oportunidades para que os alunos interajam com ideias matemáticas (NCTM, 2014).

Manipulativos físicos e virtuais, bem como outros modelos concretos, auxiliam os alunos a visualizar relações matemáticas (Roschelle, et al., 2010; Moyer-Packenham, Ulmer, & Anderson, 2012). No seu estudo, Sarama e Clements (2009) sugerem que o resultado de trabalhar com manipulativos virtuais é equivalente a usar materiais físicos. Ao recorrer a este artefacto digital, os alunos podem interagir com uma representação no ecrã de um computador de um manipulativo para explorar relações matemáticas (Dick & Hollebrands, 2011), aplicar conceitos matemáticos e explorar processos de representar esses mesmos conceitos (Wright, 1994; Moyer-Packenham, Salkind, & Bolyard, 2008).

Torna-se, portanto, necessário esclarecer o que se entende por manipulativos virtuais. Ainda que não seja consensual a definição destes artefactos, concordando com Moyer, Bolyard e Spikell (2002), é importante fazer a distinção entre representações estáticas e dinâmicas de manipulativos concretos. Representações visuais estáticas são essencialmente imagens – ainda que a sua aparência seja semelhante ao manipulativos concretos, não podem ser usadas da mesma forma –, já as representações visuais dinâmicas são objetos que, além de a sua representação visual ser idêntica ao objeto físico, podem ser manipulados da mesma forma, recorrendo aos periféricos

disponíveis (rato, teclado, ecrãs tácteis, etc.). É a categoria dinâmica que é relevante para este estudo e que se procura definir de seguida.

Segundo Kim (1993) e Terry (1995), manipulativos virtuais são imagens gráficas geradas por computador de manipulativos físicos, que são usadas da mesma forma, mas por operação de teclado em vez de ação física em objetos tridimensionais. No mesmo sentido apontam Rosen e Hoffman (2009), acrescentando que são objetos virtuais interativos, disponíveis na internet.

Uma outra perspetiva, considera fundamental a possibilidade de construção de conhecimento matemático para a definição de manipulativo virtual. Na opinião de Moyer, Bolyard e Spikell (2002), manipulativo virtual é uma representação visual interativa, alojada on-line, de um objeto dinâmico que proporciona oportunidades para construir conhecimento matemático. Moyer-Packenham e Bolyard (2016) considerando os recentes avanços tecnológicos da capacidade de computação, que permitem o uso de softwares complexos *off-line* ou através de aplicações, definem manipulativo virtual como uma representação visual interativa, de base tecnológica, de um objeto matemático dinâmico, incluindo todas as valências programáveis que permitem a sua manipulação, que apresenta oportunidades para construir conhecimento matemático.

Clements e McMillen (1996) sugerem que o uso de manipulativos virtuais pode ser benéfico para o processo de ensino e de aprendizagem da matemática, uma vez que ajudam a formar conexões entre ideias matemáticas. Para tal devem apresentar as seguintes características:

- permitir ações simples de mudança, repetição e de desfazer;
- permitir aos alunos salvar configurações e sequências de ações;
- ligar dinamicamente diferentes representações e manter uma conexão estrita entre os objetos retratados e símbolos;
- permitir aos alunos e professores colocar e solucionar as suas próprias situações problemáticas;

- permitir aos alunos desenvolver o controle crescente de uma ferramenta matemática flexível e extensível.

Os manipulativos virtuais integram representações visuais, verbais e simbólicas, ao mesmo tempo que permitem que os alunos movam objetos da mesma forma que movimentariam manipulativos concretos (Johnson, Campet, Gaber, & Zuidema, 2012). Segundo os mesmos autores (2012), os manipulativos virtuais são flexíveis, permitindo a oportunidade de ensinar conceitos rapidamente e oferecer mais momentos de ensino e de aprendizagem face a uma resposta incorreta dos alunos. Estas ferramentas on-line ajudam a avaliar as estratégias de resolução de problemas e a compreensão matemática dos alunos. Aprendizagens recentes são frágeis e requerem sistematização: o uso de manipulativos virtuais pode reforçar a compreensão dos conceitos (Ozmantar, 2005).

De seguida, apresentam-se estudos realizados que contribuem para a discussão que envolve o uso de manipulativos virtuais na construção do conhecimento matemático. Investigação sobre manipulativos virtuais disponíveis na National Library of Virtual Manipulatives (NLVM), onde se encontram alojados dois dos manipulativos escolhidos para a realização deste estudo, indica a utilização de manipulativos virtuais em sala de aula como benéfica para a compreensão de conceitos matemáticos, assim como a importância das restrições e especificidades de cada manipulativo virtual, que deve ser escolhido cuidadosamente para o objetivo pretendido (Drickey, 2000; Akihiko, 2002; Izydorczak, 2003; Dorward, 2004; Reimer & Moyer, 2005; Suh J. M., 2005; Shih, 2015; Suh & Moyer-Packenham, 2016).

No seu estudo sobre conceitos relacionados com álgebra e pré-álgebra, Gningue, Menil e Fuchs (2014) sugerem que trabalhar com manipulativos virtuais permitiu aos alunos compreender os conceitos matemáticos abordados e esclarecer concepções matemáticas prévias. Outros estudos referem o uso de manipulativos virtuais como benéficos para a compreensão de conceitos matemáticos uma vez que oferecem a possibilidade de visualização (Lin, Shao, Wong, Li, & Niramitranon, 2011; Moyer-Packenham, Ulmer, & Anderson, 2012), atenuam a abstração e tornam assim os conceitos matemáticos mais perceptíveis (Vaz, Amado, & Carreira, 2017). Já o uso de manipulativos virtuais como ferramenta de Modelação Matemática, além de proporcionar feedback imediato

e assegurar que os conceitos matemáticos são reforçados corretamente (Durmus & Karakirik, 2006; Suh & Moyer-Packenham, 2008; Burns & Hamm, 2011), permite que os alunos construam, de forma gradual e significativa, os conceitos matemáticos necessários para a compreensão das situações problema investigadas (Silva, 2015).

Gningue, Menil e Fuchs (2014) apresentam ainda complementarmente à melhoria da compreensão dos conceitos matemáticos, outras vantagens resultantes do uso de manipulativos virtuais, como a motivação dos alunos para as tarefas, feedback instantâneo e validação imediata da tarefa pela *applet* – esta característica permite uma maior autonomia aos alunos, sem necessitarem da correção do professor a cada tarefa, permitindo que trabalhem ao seu ritmo, de acordo com as suas capacidades.

No estudo com professores em formação, Suh (2016) apresenta evidências de que os participantes reconheceram a importância de compreender como usar a tecnologia, de forma a proporcionar maior equidade no processo de ensino e de aprendizagem, enquanto procuraram auxiliar os alunos a colmatar lacunas no conhecimento matemático.

Relativamente ao uso de manipulativos virtuais em contexto de sala de aula, as pesquisas científicas publicadas mencionadas nesta secção, sustentam o argumento da importância da integração de manipulativos virtuais no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, atendendo às especificidades e restrições de cada manipulativo virtual, de forma a adequar a escolha aos objetivos da sequência de ensino e ao contexto da turma.

2.3 Opções metodológicas

2.3.1 Descrição do estudo

Tendo em conta os objetivos e questões orientadoras do estudo estabelecidas na secção 2.1.2, a metodologia escolhida para a sua consecução segue os pressupostos de uma investigação qualitativa de índole interpretativa e design investigação-ação (Bogdan & Biklen, 2013). Com a preocupação de respeitar o ambiente natural dos participantes, este trabalho serve o propósito de descrever, analisar e procurar compreender, no

contexto específico da turma em estudo, em que condições pedagógicas a integração dos manipulativos virtuais nas práticas de sala de aula, usando a MMCAA, gera impactes positivos na construção do conhecimento dos alunos relacionado com a promoção do desenvolvimento dos sentidos da adição e da subtração.

Bogdan e Biklen (2013, p. 16) utilizam “a expressão investigação qualitativa como um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características”, metodologia em que as questões de investigação se estabelecem com o intuito de investigar os fenómenos na sua plenitude e contexto natural (Bogdan & Biklen, 2013). Tuckman (2000), suportando-se em Bogdan e Biklen (2013), apresenta cinco características principais que conferem a uma investigação o cunho de investigação qualitativa: 1) A situação natural constitui a fonte dos dados, sendo o investigador o instrumento-chave da recolha de dados; 2) A sua primeira preocupação é descrever e só secundariamente analisar os dados; 3) A questão fundamental é todo o processo, ou seja, o que aconteceu, bem como o produto e o resultado final; 4) Os dados são analisados indutivamente, como se reunissem, em conjunto, todas as partes de um puzzle; 5) Diz respeito essencialmente ao significado das coisas, ou seja, ao “porquê” e ao “o quê” (p. 508).

Como refere Afonso (2005, p. 14), a metodologia qualitativa preocupa-se com “a recolha fiável e sistemática sobre aspetos específicos da realidade social usando procedimentos empíricos com o intuito de gerar e inter-relacionar conceitos que permitam interpretar essa realidade”. Na prática, implica que a investigação qualitativa produza rapidamente enormes quantidades de dados (Cohen, Manion, & Morrison, 2007), criando a necessidade de o investigador recorrer a procedimentos e instrumentos adequados, fiáveis e consistentes (Guba & Lincoln, 1981). De acordo com Hammersley e Atkinson (1983), nesta tipologia de investigação, os principais métodos para a recolha de dados são: observação participante, entrevistas e conversas, documentos e notas de campo, relatos, notas e memorandos.

Com crescente diversificação e heterogeneidade dos contextos pedagógicos, a investigação-ação, mais do que uma metodologia, assume-se como uma dimensão importante da prática docente reflexiva (Sanches, 2005), promotora do

desenvolvimento profissional docente (Cohen, Manion, & Morrison, 2007; Mesquita-Pires, 2010). Mais do que uma metodologia, a investigação-ação procura ultrapassar dicotomia entre teoria e prática (Noffke & Somekh, 2010).

Máximo-Esteves (2008, p. 82) define investigação-ação como “um processo dinâmico, interativo e aberto aos emergentes e necessários reajustes, provenientes da análise das circunstâncias e dos fenómenos em estudo”, uma metodologia de pesquisa de cariz prático e aplicado, orientada para a resolução de problemas reais (Coutinho, et al., 2009). Nesta metodologia, os investigadores estão cientes da inevitabilidade das consequências da sua intervenção e do potencial para operar mudanças – a maioria da investigação-ação procura intencionalmente estudar algo com vista a mudar ou melhorar o contexto em que decorre (Berg, 2004). Segundo o mesmo autor, é um método de investigação em que a principal força motriz para o investigador e para a investigação é a possibilidade de criar mudanças sociais positivas.

Cohen, Manion e Morrison (2007) referem que a investigação-ação combina seis conceitos: um ciclo direto que consiste em identificar um problema, planear uma intervenção, implementação da intervenção e avaliação do resultado; prática reflexiva; emancipação política; teoria crítica; desenvolvimento profissional; investigação participativa e colaborativa.

Uma vez que este estudo procurou recolher dados no ambiente natural onde ocorreram as ações – desempenhando o investigador um papel fulcral na recolha –, descrever as situações vividas pelos sujeitos de investigação e interpretar os significados que estes lhes atribuem, recorrendo a procedimentos interpretativos para produzir dados descritivos (Sousa & Baptista, 2012; Bogdan & Biklen, 2013), justifica-se a opção por uma abordagem qualitativa. De forma análoga, uma vez que procurou, através da investigação, encontrar soluções para a melhoria de uma situação real e prática – com e para os participantes –, contribuindo também para a construção do conhecimento de todos os participantes (Berg, 2004; Cohen, Manion, & Morrison, 2007; Coutinho, et al., 2009), justifica-se a opção pela investigação-ação.

Não se procurou provar ou demonstrar a aplicabilidade de uma teoria, mas sim descrever e compreender uma proposta de integração da tecnologia no processo de

ensino e de aprendizagem, com e para a compreensão, dos sentidos da adição e da subtração.

2.3.2 Contexto do estudo

A intervenção deste estudo realizou-se junto de uma turma do 1.º ano do 1.º CEB numa escola da zona de Coimbra no ano letivo 2017/2018. A totalidade dos 26 alunos que integravam a turma participaram no estudo, agrupados em 13 pares de acordo com as condições da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) (Vygotsky, 1980), cujos níveis de discrepância ótima foram estabelecidos de acordo com os resultados das tarefas realizadas pelos alunos na Fase Inicial. No entanto, devido à natureza deste relatório, embora se tenha dado o mesmo acompanhamento a todos os grupos de alunos, apenas iremos apresentar a análise de resultados de dois grupos. A escolha desses grupos teve em consideração o facto de esses serem representativos dos diferentes níveis de conhecimentos considerados, estabelecidos de acordo com a grelha de análise apresentada na secção 2.3.4. A análise dos resultados das tarefas realizadas pelos alunos na Fase Inicial, de acordo com os critérios estabelecidos, permitiu estabelecer o nível de conhecimento de cada aluno – que corresponde à mediana da classificação em cada tarefa – e identificar fragilidades na compreensão dos sentidos da adição e da subtração. Um dos grupos formado por um aluno situado no nível 1 e uma aluna no nível 2, o outro formado por um aluno no nível 2 e um aluno no nível 3.

Optou-se pelo trabalho a pares, uma vez que o trabalho em pequenos grupos é um dos fatores fundamentais para que ocorram aprendizagens e mudanças cognitivas, quando se recorre à MMCAA – particularmente numa turma sem contacto com esta prática de sala de aula, devendo os grupos serem constituídos por dois ou três alunos (Stender, 2012).

Para a consecução deste estudo foram percorridas várias etapas, cuja ordem cronológica se estabelece de seguida. Após terem sido dados os passos, anteriormente descritos, que levaram à definição da questão e objetivos da investigação, desenhou-se um plano de ação que encontrou sequência na recolha de dados.

2.3.3 Design do estudo

A planificação das sessões de intervenção foi antecedida pela avaliação da literacia informática do grupo em estudo, sob a forma de questionário (cf. Apêndice 1). Partindo da leitura dos dados recolhidos, desenharam-se as intervenções e as tarefas que as compunham, seguindo a taxionomia proposta por Sampaio e Coutinho (2015), enquadrando-se as tarefas no 2.º quadro de atividades matemáticas, Praticar.

O uso de manipuláveis concretos precedeu a introdução dos manipulativos virtuais, respeitando assim a progressão do concreto para o abstrato. O conjunto de sessões aqui discutido, estruturou-se da seguinte forma (para uma descrição detalhada de cada fase, consultar Apêndice 2):

Quadro 3 – Cronograma das sessões de intervenção

Fase Inicial	Fase de Intervenção						Fase Final
12 de fevereiro	Exploração das <i>applets</i>	Sentido					2 de junho
		Acrescentar	Retirar	Completar	Comparar	Juntar	
	12 de abril	26 de abril	3 de maio	10 de maio	17 de maio	31 de maio	

Fase inicial: Cada aluno, de forma individual, resolveu um conjunto de situações problemáticas relativas a cada um dos sentidos das operações adição e subtração (cf. Apêndice 3), construído pela equipa de investigação.

Fase de intervenção: Engloba o conjunto de sessões em que se recorreu aos manipulativos virtuais, suportadas pela MMCAA – sessão de exploração das *applets*, sessões dedicadas a cada um dos sentidos da adição (juntar e acrescentar) e da subtração (retirar, comparar e completar).

A escolha dos manipulativos virtuais (*Base Blocks*, *Base Blocks addition* e *Base Blocks Subtraction*, do repositório do National Library of Virtual Manipulatives www.nlvm.usu.edu; *applets* com reta numérica estruturada criadas pelo PE no software GeoGebra) usados em cada sessão (cf. Apêndice 4) foi feita tendo em atenção as potencialidades e restrições de cada um (Drickey, 2000; Akihiko, 2002; Izydorczak, 2003; Dorward, 2004; Reimer & Moyer, 2005; Suh J. M., 2005; Shih, 2015; Suh & Moyer-Packenham, 2016), o contexto específico da turma, os conteúdos curriculares

a abordar, o que o PE sabe sobre o manipulativo e as tarefas a implementar (Koehler & Mishra, 2009).

Fase final: Constituída por um conjunto de situações problemáticas (cf. Apêndice 5), cuja resolução individual por parte dos alunos foi em moldes idênticos à fase inicial.

Sendo esta uma proposta reflexiva, foi feita a análise crítica de cada sessão de intervenção com vista a possibilitar a procura de melhorias na planificação da seguinte, não apenas no que diz respeito à aprendizagem e autonomia dos alunos, mas igualmente nas competências do PE associadas ao uso pedagógico dos manipulativos virtuais de matemática em contexto de Modelação Matemática, respeitando os princípios cíclicos da investigação-ação (Coutinho, et al., 2009; Sousa & Baptista, 2012; Cohen, Manion, & Morrison, 2007).

2.3.4 Recolha e análise de dados

A recolha de dados foi feita através de observação participante, notas de campo, registos áudio, análise documental das produções escritas dos alunos e dos dados recolhidos usando *screen recordings* captadas com o software *FlasBack Express Recorder* (Coutinho, et al., 2009), procurando desta forma garantir a triangulação de dados (Berg, 2004; Cohen, Manion, & Morrison, 2007; Walliman, 2011). Os dados recolhidos em todas as fases, foram posteriormente analisados e interpretados de acordo com os critérios de análise (Arter & McTighe, 2001; Santos, 2003; Chappuis, 2007; Ponte, et al., 2007; MEC, 2013; IAVE, 2016), criada para o efeito pela equipa de investigação (quadro 4).

Quadro 4 - Critérios de análise

	1	2	3
Conceitos matemáticos	A explicação demonstra um conhecimento muito limitado dos conceitos matemáticos usados para resolver a tarefa ou não dá uma explicação.	A explicação demonstra algum entendimento dos conceitos matemáticos usados para resolver a tarefa, mas falta-lhe coerência ou lógica ou contém algumas aceções erradas.	A explicação demonstra um completo entendimento dos conceitos matemáticos usados para resolver a tarefa.

Com o intuito de obter informação diversificada recorreu-se a múltiplas fontes, fazendo uma descrição detalhada e aprofundada relativa às questões da investigação. Não se trata de catalogar as produções dos alunos. A análise dos dados obtidos permitiu, numa primeira fase, mapear as dificuldades dos alunos de forma a desenhar um plano de ação que permitisse aos alunos a sua superação. Na fase seguinte, a análise dos dados obtidos das diversas fontes centrou-se na compreensão das aprendizagens dos alunos e na procura de melhorias no plano de ação, sempre com intenção de proporcionar melhores condições de aprendizagem para estes; compreender o contributo da presente proposta para o processo de ensino e de aprendizagem dos sentidos da adição e da subtração; perspetivar hipóteses de ampliação e aprofundamento de futuras investigações.

2.4 Apresentação de resultados

A apresentação de resultados que se segue está estruturada em sete secções. A primeira corresponde ao conjunto de dificuldades identificadas na análise dos resultados das tarefas realizadas pelos alunos na Fase Inicial. A segunda diz respeito à sessão de exploração das *applets*, desenhada com o intuito de criar condições para que a tecnologia escolhida fosse um contributo positivo na construção do conhecimento dos alunos, não um obstáculo.

Nas cinco secções seguintes apresentam-se diacronicamente os resultados dos dois pares, relacionados de cada um dos sentidos da adição e da subtração, da seguinte forma: 1) tarefas realizadas pelos alunos na Fase Inicial; 2) dados recolhidos durante a Fase de Intervenção; 3) tarefas realizadas pelos alunos na Fase Final, terminando com 4) uma síntese dos aspetos mais relevantes.

2.4.1 Mapeamento das dificuldades dos alunos

Mapear as dificuldades dos alunos, relacionadas com os sentidos da adição e da subtração, foi um dos objetivos propostos para este estudo. A partir da análise detalhada das tarefas realizadas pelos alunos na Fase Inicial (cf. Apêndice 6), identificou-se o conjunto de dificuldades que se apresentam de seguida:

- Reconhecer a presença dos sentidos da adição e da subtração em situações problemáticas;
- Compreender o significado das quantidades presentes em situações problemáticas;
- Relacionar as quantidades presentes em situações problemáticas com as estratégias escolhidas para a sua resolução (representação de colar de contas e reta numérica);
- Relacionar as quantidades presentes em situações problemáticas com o significado que assumem nas operações aritméticas adição (parcela e soma) e subtração (aditivo, subtrativo e diferença).

Com base nos resultados das tarefas realizadas pelos alunos na Fase Inicial (cf. Apêndice 6), foram definidos os pares, incluindo aqueles cuja participação é aqui alvo de análise – grupo 1, composto pelo aluno A (nível 1) e a aluna B (nível 2); grupo 2, composto pelo aluno C (nível 2) e o aluno D (nível 3).

2.4.2 Sessão de exploração

Ainda que este estudo incida nos resultados de apenas dois grupos, considerou-se relevante incluir o contributo dos restantes alunos neste ponto. Esta sessão permitiu que os alunos se familiarizassem com as *applets* escolhidas para a intervenção, ao mesmo tempo que estabeleceu a linha de ação para as restantes sessões com os manipulativos virtuais. Como já foi dito, o ambiente de aprendizagem escolhido procura dar voz ativa aos participantes. Foi com base na análise das notas de campo e gravações áudio dos momentos de avaliação das sessões que se tomaram decisões com implicações nas planificações seguintes. Uma vez que a opção por uma abordagem de descoberta e exploração dos manipulativos virtuais foi uma decisão da turma, não apenas dos grupos aqui apresentados, considera-se relevante incluir comentários de outros alunos, para além dos alunos A, B, C e D, na apresentação de evidências que justificam o caminho escolhido.

Ao longo da primeira proposta, (tarefas em que os alunos usaram a *applet NLVM Base Blocks* para representar números e a *applet NLVM Base Blocks Addition* para

representar adições, com e sem composição de unidades de ordem superior), a turma revelou-se capaz de descobrir o funcionamento e a mecânica das *applets*, principalmente através da partilha espontânea; é exemplificativo o comentário do aluno M (“é assim, está aqui $4 + 6$, depois temos de ver o resultado e pôr aqui, depois ali não sei...”), ou da aluna E, que quando descobriu que depois de compor uma unidade de ordem superior devia passar a barra para a coluna das dezenas (“Ah, já sei. Faz assim um quadrado, fica uma barra e puxamos para ali”). Estes excertos dos diálogos são ilustrativos da vontade e capacidade de descoberta da turma, motivo pelo qual foi possível colocar de parte a abordagem diretiva. A partilha de descobertas dos alunos permitiu à turma ultrapassar as várias etapas, apenas a mecânica do agrupamento de unidades necessitou de ser demonstrada pelo PE, uma vez que a manipulação do rato foi complicada de apreender e executar pelos alunos.

A discussão e avaliação desta sessão contribuiu para delinear o caminho das sessões seguintes. Os alunos manifestaram a sua preferência pelo ambiente de exploração e aprendizagem colaborativa, de que são evidências os seguintes comentários dos alunos durante a avaliação da sessão:

- “é assim, eu e o S baralhámo-nos um bocadinho ao princípio, mas depois ele disse que era para puxar para as dezenas e conseguimos fazer” – aluno M, descrevendo o processo de descoberta de compor unidades de ordem superior e resolução da *applet Base Blocks Addition*;
- “gostei também porque foi mais difícil e gostei também porque depois pudemos fazer as contas que queríamos” – aluno A, referindo-se ao momento de exploração livre, em que puderam criar e resolver operações de forma autónoma, fora da obrigatoriedade do enunciado;
- “eu nunca tinha mexido no computador, mas a E ajudou-me e eu consegui” – aluna F, valorizando a contribuição do par para conseguir usar um computador pela primeira vez.

2.4.3 Sentido acrescentar

2.4.3.1 Fase Inicial

Individualmente, os alunos procuraram responder à seguinte situação problemática: “Nas férias de Carnaval a Luísa ajudou o irmão a fazer uma máscara com jornais. A Luísa usou 4 jornais, para terminar a máscara o irmão usou 5 jornais. Quantos jornais foram precisos para fazer a máscara?” (cf. Apêndice 3, tarefa 2).

O aluno A utiliza a representação do colar de contas como estratégia de resolução, reconhecendo o sentido acrescentar presente na situação problemática e os dados correspondentes a cada parcela da operação que efetua, sem cometer erros (Figura 4). No entanto, não estabelece qualquer relação entre a soma e a resposta, encontrando-se no nível 1 dos critérios estabelecidos.

A aluna B escolhe também a representação do colar de contas como estratégia de resolução, reconhecendo o sentido acrescentar presente na situação problemática e os dados correspondentes a cada parcela da operação que efetua, sem cometer erros (Figura 5). No registo da resposta escrita comete um lapso, sendo necessário interpretar a resposta dada para acompanhar o raciocínio da aluna, motivo pelo qual se situa no nível 2 dos critérios de análise estabelecidos.

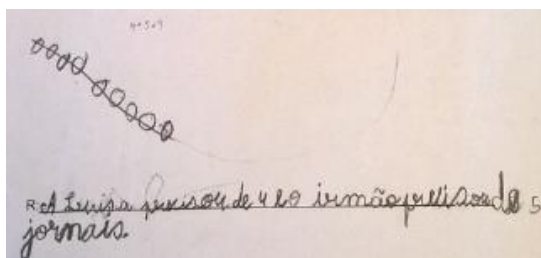


Figura 4 – resolução do aluno A

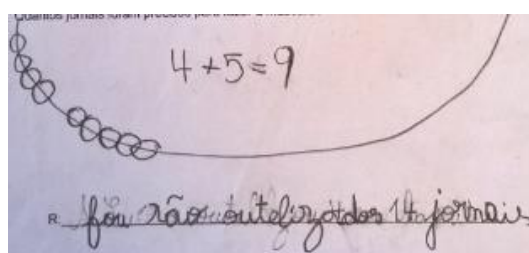


Figura 5 – resolução da aluna B

O aluno C opta pela representação do colar de contas para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a presença do sentido acrescentar na situação problemática (Figura 6), razões pelas quais se enquadra o aluno no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

O aluno D opta pela representação do colar de contas e reta numérica como estratégias para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a

presença do sentido acrescentar na situação problemática (Figura 7), enquadrando-se assim no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

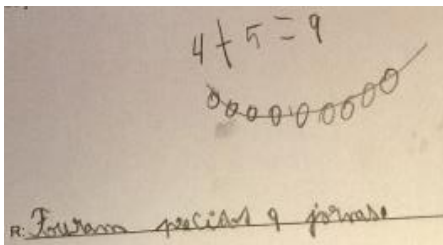


Figura 6 – resolução do aluno C

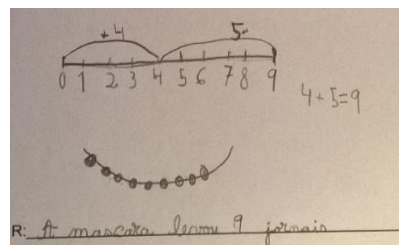


Figura 7 – resolução do aluno D

2.4.3.2 Fase de Intervenção

Grupo 1:

Quando se sentaram nos lugares, ao deparar-se com o ecrã (Figura 8), o aluno A profere a seguinte afirmação: “duas parcelas e uma soma, isto não faz significado”, evidência da sua diminuta compreensão da estrutura da adição. Antes de ler a folha de trabalho (cf. Apêndice 7), o aluno F propõe uma divisão de tarefas relativamente ao número de vezes que cada um manipula o rato. Durante a fase de descoberta da manipulação da reta numérica, a aluna B rapidamente representou o valor da primeira parcela, optou, no entanto, por não partilhar com a turma o seu achado e colocou novamente os objetos na sua posição inicial (Figura 9), ficando esta descoberta apenas disponível ao par. Apesar de não estarem ainda na fase da discussão, alguns dos alunos sentiram necessidade de partilhar com a turma sempre que descobriam algo relacionado com a manipulação e mecânica da *applet*.

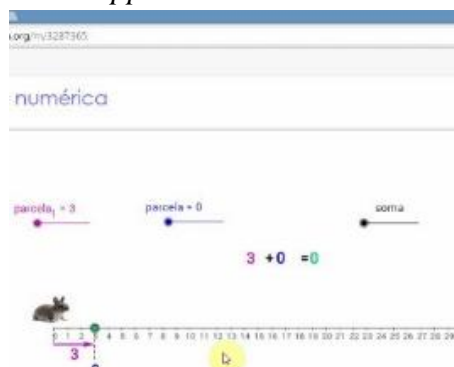
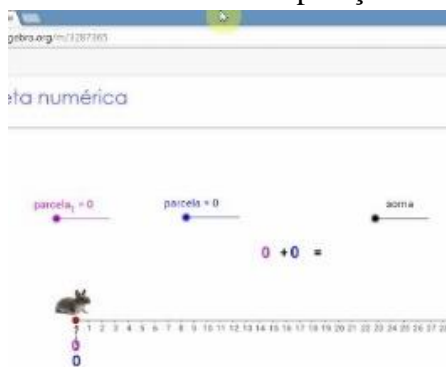


Figura 8 – disposição inicial da reta numérica Figura 9 – 1.ª parcela representada pela aluna B

Após descobrirem a possibilidade de manipular os valores através da *slide bar* e da posição dos pontos na reta numérica, experimentaram ambas até elegerem a *slide bar* como a forma mais eficaz e precisa. Depois de representarem as duas parcelas, o aluno

A sugere um valor para a soma – “3 mais 5 é bué fácil, é 10”, comprovando a sua dificuldade no cálculo mental –, indicação de imediato rejeitada pelo par, a que o aluno A responde com uma contagem com auxílio dos dedos, corrigindo assim a sua proposta anterior.

Enquanto que a aluna B insiste em realizar a operação no papel e só depois representar o valor encontrado na reta numérica, o aluno A defende usar os vetores para obter o valor da soma (“vês, é só isto, é 16”). Ao efetuarem a operação seguinte ($14 + 19$), a análise das gravações evidencia que existe já uma evolução na compreensão do funcionamento do manipulativo virtual, bem como da sua relação com a adição. Quando finalmente se apercebem da relação entre as parcelas e a soma tudo se torna fácil, conquista agilizada pela comunicação matemática induzida pelos termos presentes no ecrã, parcela e soma, como se pode verificar no diálogo entre o par:

Aluno A: Eu faço a soma, 23!

Aluna B: Não, não é. A soma não é 23.

Aluno A: É, olha ali. O resultado é 23.

Aluna B: Ah, então aparece aqui. Eu não estava a perceber uma coisa, mas depois o A...

Desta transcrição sobressai a vantagem do trabalho a pares. Os resultados das tarefas realizadas na Fase Inicial sugerem que a aluna B se encontra num nível superior, no que diz respeito ao conhecimento matemático; por outro lado, o aluno A é bem mais proficiente na utilização do software. A complementaridade do par leva os dois elementos a colaborar e ultrapassar os obstáculos à medida que surgem. Ao longo da gravação é possível verificar o entusiasmo e o empenho na tarefa, apesar da crescente dificuldade.

Na discussão da situação problemática (cf. Apêndice 7, tarefa 3), o aluno A ao dizer “(...) usámos a reta numérica e tinha a parcela rosa e a parcela azul e a soma, era para a soma ... era para o coelho ir para o número do resultado”, denota uma progressão na compreensão da estrutura da adição. Já a aluna B, como se pode ver na transcrição abaixo, apesar de estar muito próxima da utilização mecânica da *applet*, evidencia compreender o sentido acrescentar presente na situação problemática:

Aluna B: Nós no último problema pusemos 28 no rosa e na parcela azul pusemos mais 16 e o resultado deu 44.

PE: E como é que chegaram a esse resultado?

Aluna B: Nós vimos que dava 44 e depois no preto, como é que se chama... na soma o coelho foi para o 44 e a conta deu 44.

PE: Então e qual foi a vossa resposta?

Aluna B: A Titi daqui a 16 anos irá ter 44 anos.

Grupo 2:

De início o par não sabe muito bem por onde começar a primeira tarefa da folha de exploração (cf. Apêndice 7, tarefa 1). Desafiados pela pergunta do PE colocada à turma – “Como é que podemos representar o valor da 1.ª parcela no computador?” –, o aluno C explora o ambiente de trabalho com o ponteiro do rato. Ao aperceber-se da mudança de forma do ponto ao passar sobre a *slide bar* soma, vai clicando até obter 3 unidades (Figura10). Descoberta a manipulação da *slide bar*, representam o valor correspondente à segunda parcela, tarefa dificultada pela manipulação do rato. O aluno C relaciona a estrutura do manipulativo com a estrutura da operação adição e manipula a *slide bar* soma de forma a representar o valor lido na reta numérica, correspondente ao valor da adição das duas parcelas (Figura 11), partilhando a descoberta com o par: “Estás a ver, o coelhinho é a soma.”

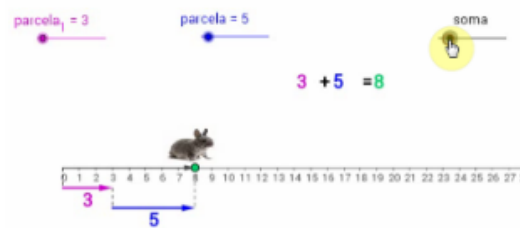
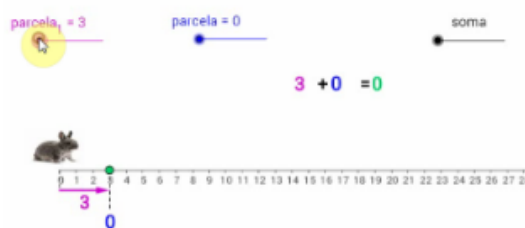


Figura 10 – Manipulação da 1.ª parcela

Figura 11 – Manipulação da soma

As restantes adições da tarefa 1 são realizadas com facilidade, alternando os alunos C e D na manipulação do rato. Nas primeiras adições ($3 + 5$ e $9 + 7$) o aluno D insiste em confirmar os resultados com os dedos, passando a confiar no manipulativo por incentivo do par: “Olha, a reta numérica está sempre certa”. Na adição seguinte ($25 + 18$), o aluno D, depois de representar os valores de ambas as parcelas, lê de imediato a reta numérica – “É lá, 43!” –, evidenciado já confiar no manipulativo (Figura12).

Após lerem o enunciado da tarefa 3, uma situação problemática, iniciam de imediato a sua resolução com a representação correta dos valores das parcelas e o valor da soma, lida na reta numérica (Figura 13), para depois traduzirem este valor na resposta à situação problemática: A Titi daqui a 16 vai ter 44 anos. Estas evidências sugerem o reconhecimento do sentido acrescentar na situação problemática, o significado das quantidades e a sua relação com a estrutura da operação adição.

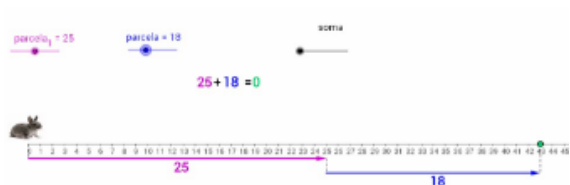


Figura 12 – Leitura do aluno D

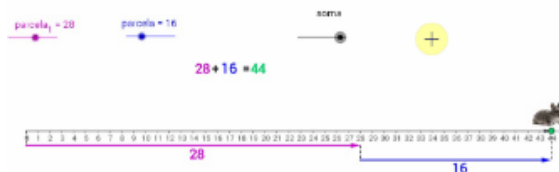


Figura 13 – Resolução da situação problemática

2.4.3.3 Fase Final

Individualmente, os alunos procuraram responder à seguinte situação problemática: “Na biblioteca da Solum Sul estavam 53 livros. A escola comprou mais 41. Quantos livros tem a biblioteca agora?” (cf. Apêndice 5, tarefa 2).

Tanto o aluno A (Figura 13) como a aluna B (Figura 14), o aluno C (Figura 15) e o aluno D (Figura 16) evidenciam compreender a presença do sentido acrescentar presente na situação problemática, a identificação dos dados correspondentes a cada parcela estabelecendo uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática, optando por uma estratégia de cálculo ao invés de contagem, sem erros de implementação na estratégia de resolução escolhida. Estas evidências enquadram todos os alunos no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

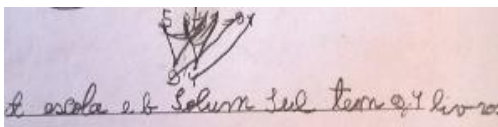


Figura 13 – Resolução do aluno A

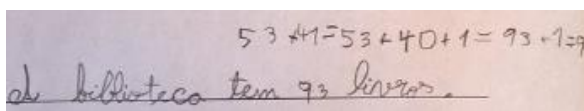


Figura 14 – Resolução da aluna B

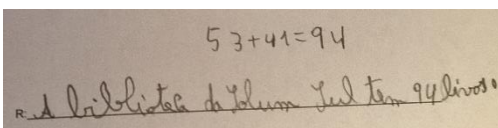


Figura 15 – Resolução do aluno C

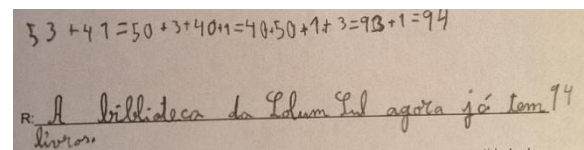


Figura 16 – Resolução do aluno D

2.4.3.4 Síntese

As várias transcrições, representativas do conteúdo das gravações, evidenciam que a linguagem matemática adequada vai sendo, cada vez mais, presença recorrente no discurso dos alunos, sem esquecer que se trata de alunos do 1.º ano. Da análise da captação de ecrã, sobressai a capacidade de descoberta autónoma dos pares, a rápida evolução no que diz respeito à manipulação da *applet*, a progressiva incorporação dos termos matemáticos na sua comunicação e a importância de os manipulativos virtuais proporcionarem feedback e validação imediata das tarefas, aumentando a capacidade de trabalho autónomo por parte dos alunos. Fica também claro que a manipulação do rato, dado a exatidão dos movimentos requerida, é por vezes impeditiva de um melhor desempenho e resolução mais rápida das tarefas.

No que diz respeito à compreensão do sentido acrescentar, as evidências suportam a inferência de os alunos terem alcançado um nível de compreensão mais profundo, particularmente no que concerne ao significado das quantidades, a sua relação com a estrutura da operação aritmética adição e a relação da soma com a resposta à situação problemática. É também perceptível a evolução dos elementos do grupo 1, atingindo, à semelhança dos elementos do grupo 2, o nível 3 dos critérios de análise, após superarem dificuldades detetadas na Fase Inicial. Na Fase Final, o aluno A conseguiu estabelecer uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática, já a aluna B redigiu uma resposta correta à situação problemática, sem ser necessário interpretar o que escreveu para aferir a sua correção.

2.4.4 Sentido retirar

2.4.4.1 Fase Inicial

Individualmente, os alunos procuraram responder à seguinte situação problemática: “A turma do 1.º A já aprendeu 13 letras. 5 são vogais. Quantas são as consoantes que já conhecem?” (cf. Apêndice 3, tarefa 3).

O aluno A recorre à representação do colar de contas como estratégia de resolução, possível de interpretar apesar de o ter apagado (Figura 17). Representa apenas as

quantidades da situação problemática, não evidencia ter reconhecido a presença do sentido retirar, encontrando-se no nível 1 dos critérios de análise estabelecidos.

A aluna B opta pela representação do colar de contas como estratégia de resolução, cuja interpretação evidencia que a aluna reconhece o sentido retirar presente na situação problemática e o significado das quantidades representadas. Apesar de cometer um erro ao indicar ao trocar o sinal da subtração pelo da adição, relaciona o resultado obtido com a resposta à situação problemática (Figura 18), assim, situa-se no nível 2 dos critérios de análise estabelecidos.

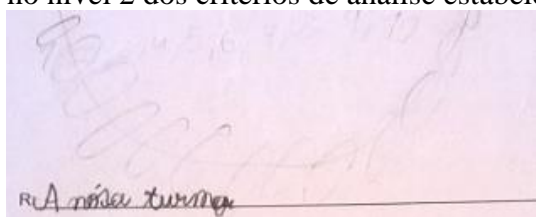


Figura 17 – Resolução do aluno A

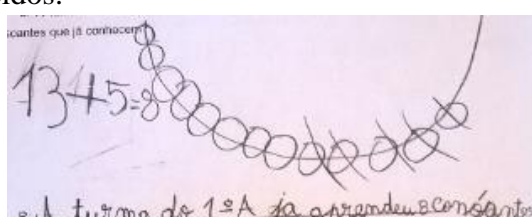


Figura 18 – Resolução da aluna B

Não é possível afirmar que o aluno C compreendeu a presença do sentido retirar presente na situação problemática. Recorre à representação do colar de contas como estratégia de resolução, aparenta ter reconhecido o sentido retirar, no entanto, comete um erro de contagem (Figura 19). As evidências colocam o aluno no nível 2 dos critérios de análise estabelecidos.

O aluno D opta pela representação do colar de contas e reta numérica como estratégias para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a presença do sentido retirar na situação problemática, o significado das quantidades e a relação da diferença com a resposta à situação problemática (Figura 20). As evidências colocam o aluno no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

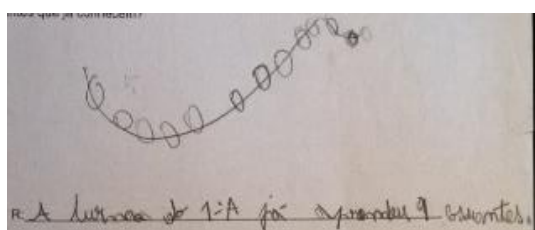


Figura 19 – Resolução do aluno C

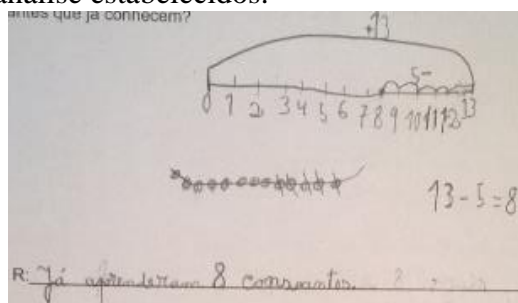


Figura 20 – Resolução do aluno D

2.4.4.2 Fase de Intervenção

Grupo 1:

Na resolução da primeira subtração da tarefa 1 (cf. Apêndice 7), a aluna B diz ao aluno A que “só podes pôr mais um cubinho vermelho, que aqui é só unidades” (Figura 21), referindo-se à necessidade de agrupar e compor uma unidade de ordem superior, tal como faziam na *applet* *Base Blocks Addition*. Por seu lado, o aluno A, talvez por se recordar da manipulação da *applet* durante a sessão de exploração, avança sem hesitar na representação do subtrativo, concluindo a operação, demonstrando a mecânica da *applet* à aluna B (Figura 22) – “Quando estiver tudo aí, temos de carregar aqui”, referindo-se ao botão *Begin Problem*, “Eu faço, posso?”.



Figura 21 – Manipulação do aluno A

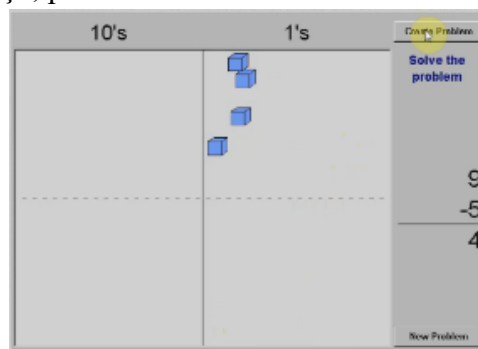


Figura 22 - Subtração concluída pelo aluno A

A subtração seguinte ($16 - 4$) é resolvida com facilidade. Representam as quantidades do aditivo e do subtrativo, retirando ao aditivo o subtrativo para obter a diferença (Figura 23). A terceira subtração da tarefa 1 ($23 - 9$) proporcionou ao par um novo desafio, a necessidade de decompor uma unidade de ordem superior (Figura 24). A diáde discute entre si várias estratégias de resolução, sempre relacionadas com a mecânica da *applet*, sem qualquer sucesso o que os leva a uma conclusão: “Esta conta está mal!” – aluna B. O aluno A decide copiar o resultado do par da mesa ao lado para a sua folha de exploração; questionado pelo PE, assume o comportamento incorreto e o par inicia uma nova tentativa de resolução na *applet*.

A aluna B decompõe uma unidade de ordem superior; como se trata de uma manipulação exploratória, sem intencionalidade matemática, passa da fase “Eu já estou a perceber”, para “Porque é que aqui está riscado? Olha, tenta tu. Eu não estou a perceber”, apagando o que fez e entrega a manipulação ao aluno A. Após mais algumas tentativas, solicitam o auxílio do PE:

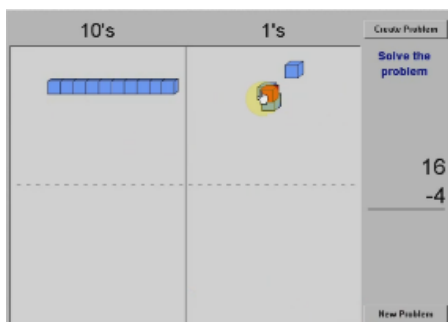


Figura 23 – Retirar o subtrativo ao aditivo

Aluna A: Eu fiz assim... e depois meti um destes assim e ela desmanchou-se (Figura 25).

PE: Mas ao desmanchar-se, o que aconteceu à dezena?

Aluna B: Ficou assim – apontando para o ecrã.

PE: A dezena transformou-se em?

Aluna B: Unidades.

PE: Exatamente, decompôs-se em unidades.

Aluna B: Mas depois isto... – referindo-se ao algoritmo da subtração presente no ecrã.

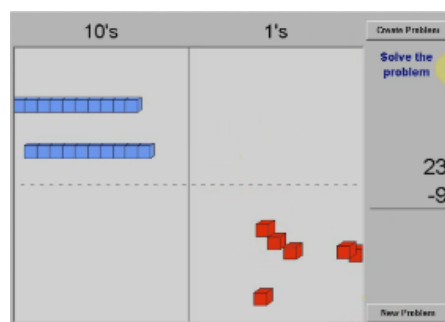


Figura 24 - Subtração com decomposição

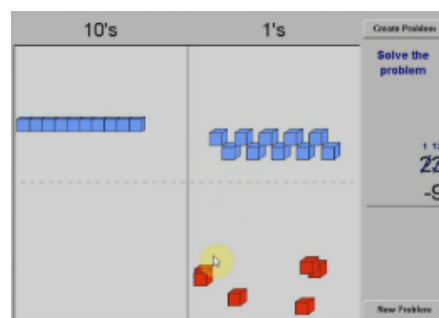


Figura 25 – Manipulação da aluna B

Foi reforçado pelo PE que o algoritmo não foi ainda trabalhado na sala de aula, para se concentrarem no que já conhecem da subtração e tentarem avançar na resolução da tarefa. Conseguem então avançar, concluindo a resolução na *applet* e registar o valor da diferença na folha de exploração.

A subtração seguinte ($58 - 18$) foi resolvida pela aluna B, o aluno A considerou-a muito difícil. Com o auxílio e incentivo da aluna B, o aluno A colaborou na resolução da última subtração da tarefa na *applet*. Representam as quantidades do enunciado na *applet*, 73 no aditivo e 38 no subtrativo (Figura 26), ultrapassando a necessidade de decomposição sem dificuldade (Figura 27).

Obtida a diferença, registam na folha de exploração a sua resposta – “Só podem comer 35 pães”. Este foi o último grupo a terminar a tarefa 2, não tiveram tempo para a exploração livre da *applet*.

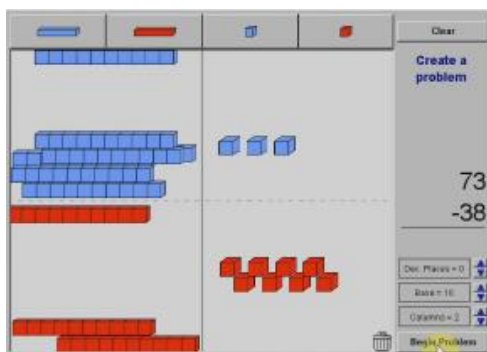


Figura 26 – Representação do aditivo e subtrativo

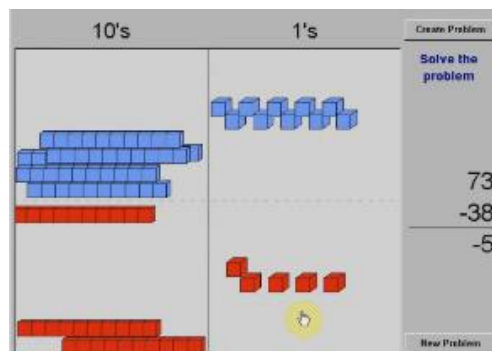


Figura 27 – Decomposição de uma unidade de ordem superior

Durante a discussão do problema, o contributo do par não conseguiu justificar a sua atuação, apenas respondendo às questões colocadas:

Aluna A: “Eu e o B, no exercício 2 tivemos um bocadinho de dificuldade na conta por causa que nós não estávamos a perceber isto”, referindo-se ao algoritmo. “Metemos 7 dezenas e 3 unidades”. Quando questionada pelo PE acerca da função desta quantidade na operação, repete o que o aluno B lhe segreda ao ouvido, “O aditivo”. “E depois metemos menos 3 dezenas e menos 8 unidades e deu-nos 35”

PE: E o 38 é o quê? Na operação.

Aluno A e B em coro: Uma subtração

PE: Mas se o 73 é o aditivo, o 38 é o quê?

Aluno B: Subtrativo.

Esta transcrição evidencia que o discurso dos alunos A e B não recorre muito à linguagem matemática adequada, no entanto foram os voluntários para iniciar a discussão. O questionamento por parte do PE, para além de procurar auxiliar os alunos A e B a clarificar a sua explicação, teve também como objetivo incentivar os restantes grupos a incluir linguagem matemática adequada na sua participação oral.

Grupo 2:

O par lê o enunciado (cf. Apêndice 7) e começa a resolução da 1.ª tarefa. O aluno C representa sem dificuldade as quantidades correspondentes ao aditivo e subtrativo da operação. Quando o aluno D faz uma contagem dos blocos para confirmar as quantidades, o aluno D diz que não precisa de o fazer – “Olha, não é preciso contares,

está aqui a dizer” (Figura 28) –, referindo-se aos valores que surgem no lado direito do ecrã, evidência da importância do feedback imediato proporcionado pela *applet*.

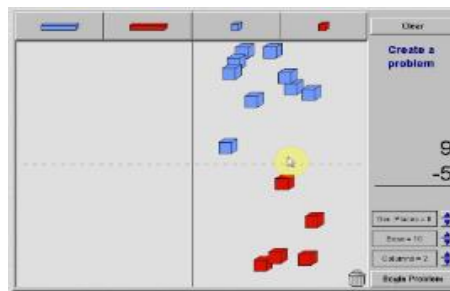


Figura 28 – Feedback do manipulativo

Na segunda subtração ($16 - 4$), a manipulação é feita pelo aluno D, com o contributo oral do aluno C: “16! É uma dezena e seis unidades, e agora menos 4. Mete 4 cubinhos destes.”, referindo-se aos cubos vermelhos usados para representar as unidades do subtrativo.

Como já não se recordavam completamente da mecânica da *applet*, saltam um passo importante – clicar em *Begin Problem* depois de representarem o aditivo e o subtrativo. Ainda assim, nas primeiras tentativas conseguiram interpretar o valor da diferença, fazendo a leitura do valor do aditivo após retirarem a quantidade do subtrativo, anulando os objetos azuis com os objetos vermelhos (Figura 29). Alertados pelo PE,

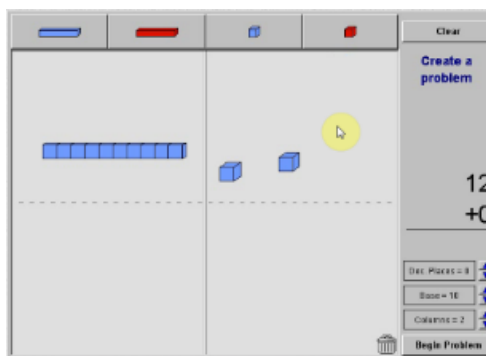


Figura 29 – Leitura da diferença entre 16 e 4

refazem as operações anteriores utilizando a *applet* da forma pretendida, confirmando os valores da diferença obtidos anteriormente. Não era o objetivo proposto, mas ao usarem a *applet* desta forma conseguem interpretar a diferença devido à capacidade do manipulativo virtual de tornar visível relações e conceitos matemáticos.

Na resolução da 4.^a subtração ($58 - 18$), o aluno D sugere que vão obter 50 como valor para a diferença, enquanto que o aluno C sugere 40. À medida que continua a resolver a operação, o aluno D revê o seu cálculo mental e corrige a sua hipótese para 40. Este episódio evidencia algumas das valências dos manipulativos virtuais para a construção do conhecimento matemático dos alunos, permitindo colocar e testar hipóteses, fornecendo feedback e validação imediata das tarefas.

Terminada a leitura da situação problemática (cf. Apêndice 7, tarefa 2), o par divide as tarefas de manuseamento do rato e avançam para a resolução. Reconhecem o sentido retirar presente na situação problemática e compreendem o significado das quantidades em causa, representando-as corretamente como aditivo e subtrativo. Resolvem a subtração ($73 - 38$) sem obstáculos obtendo a diferença (Figura 30), que relacionam com a resposta pretendida à situação problemática – “O 2.º turno tem 35 pães.”

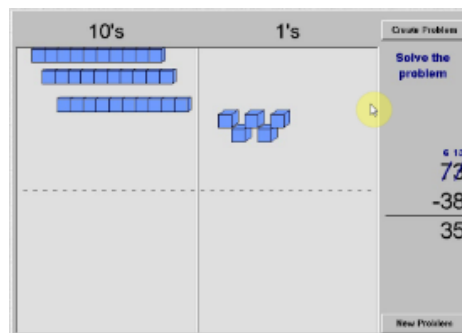


Figura 30 – Resolução da situação problemática

Durante a manipulação da *applet*, aquando da situação problemática, o par enceta um pequeno diálogo que evidencia a importância de situações problemáticas com base na realidade, quando se recorre à MMCAA:

Aluno C: Eu não como pão. Hoje é que é impossível de comer, só se comer em casa porque hoje vou almoçar a casa.

Aluno D: Eu não sei se hoje é peixe ou não, porque ontem foi carne.

Aluno C: Hoje pode não ser peixe, olha é 35 (regressando à tarefa matemática).

Na tarefa de exploração livre, o aluno C limita-se a colocar no ecrã barras e cubos em grande quantidade para depois anular, ainda que o aluno D se oponha: “Só podes fazer 99” ou “essa tua conta vai dar sarilho”, evidenciando compreender o conceito de valor de posição e o seu significado na representação proporcionada pela *applet*. Tal como ao seu par, também o aluno D sente curiosidade de explorar as subtrações com grandes quantidades, no entanto, opta sempre por valores possíveis de representar e interpretar na *applet*, como no exemplo da Figura 31.

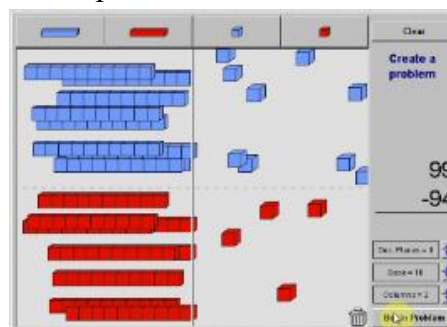


Figura 31 – Subtração criada pelo aluno D

Na discussão e avaliação da sessão, o aluno C diz ter gostado mais de trabalhar com o *Base Blocks Subtraction* do que com a *applet* reta numérica porque, como diz, “dá-me

mais jeito”, talvez uma alusão à dificuldade em manusear o rato com a exatidão necessária. Já o aluno D, considerou mais fácil de trabalhar com a reta numérica.

2.4.4.3 Fase Final

Individualmente, os alunos procuraram responder à seguinte situação problemática: “A Alice tinha trinta e sete berlindes, mas perdeu dezanove. Com que quantidade de berlindes ficou?” (cf. Apêndice 5, tarefa 3).

O aluno A, apesar de cometer alguns erros processuais (nomeadamente na implementação da estratégia de cálculo que implica decompor o subtrativo em dezenas e unidades) com impacto no resultado final, não ficou claro se foi apenas um engano ou se a sua noção de valor de posição está ainda pouco clara. Evidencia reconhecer o sentido retirar, o significado dos dados relativos ao aditivo e subtrativo, assim como a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática (Figura 32). Estas evidências colocam o aluno no nível 2 dos critérios de análise estabelecidos.

A aluna B reconhece o sentido retirar presente na situação problemática e o significado dos dados correspondentes ao aditivo e subtrativo, assim como a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática (Figura 33). Opta por uma estratégia de resolução, na qual comete um erro de cálculo em um dos passos – $27 - 9 = 19$, como é possível verificar na Figura 33 –, obtendo um valor incorreto para a diferença. Desta forma, a aluna enquadra-se no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

37 - 19 = 19

Alice tem 19 berlindes

Figura 32 – Resolução do aluno A

$37 - 19 = 37 - 10 - 9 = 27 - 9 = 19$

Alice ficou com 19 berlindes

Figura 33 – Resolução da aluna B

O aluno C e o aluno D reconhecem o sentido retirar presente na situação problemática, identificam os dados correspondentes ao aditivo e subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática. Ambos optam pela operação aritmética subtração como estratégia de resolução, no entanto, enquanto o aluno C comete um erro de cálculo (Figura 34), o aluno D não comete qualquer erro na implementação da

estratégia (Figura 35). Estas evidências enquadram os alunos no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

Handwritten work of student C. At the top, the calculation $37 - 19 = 22$ is written. Below it, the conclusion is written: "R. A Alice tem 22 berlindes."

Figura 34 – Resolução do aluno C

Handwritten work of student D. At the top, the calculation $37 - 19 = 37 - 10 - 9 = 27 - 9 = 18$ is written. Below it, the conclusion is written: "R. A Alice tem 18 berlindes."

Figura 35 – Resolução do aluno D

2.4.4.4 Síntese

Tal como nos resultados do sentido acrescentar, as evidências indicam o crescente uso correto da linguagem matemática adequada. É também importante destacar a vantagem do trabalho a pares para superar obstáculos e dos manipulativos virtuais na construção do conhecimento dos alunos, ao proporcionarem feedback e validação imediata das tarefas, aumentam a capacidade de trabalho autónomo por parte dos alunos, permitem que os alunos coloquem e verifiquem hipóteses e visualizem conceitos e relações matemáticas.

No que diz respeito à compreensão do sentido retirar, com suporte nas evidências, pode-se afirmar que os alunos alcançaram um nível de compreensão mais profundo, particularmente no que concerne ao significado das quantidades, a sua relação com a estrutura da operação aritmética subtração e a relação da diferença com a resposta à situação problemática. Quanto à progressão dos alunos, relativamente à Fase Inicial, pode dizer-se que:

- o aluno A superou o nível 1 da Fase Inicial, onde não foi capaz de reconhecer a presença do sentido retirar na situação problemática. Na Fase Final evidenciou reconhecer o sentido retirar presente na situação problemática, o significado dos dados relativos ao aditivo e subtrativo, assim como a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática. Uma vez que o erro cometido na resolução da situação problemática é de interpretação ambígua, podendo remeter para uma falha no cálculo ou para uma lacuna na compreensão da estrutura do valor de posição, enquadra-se no nível 2 dos critérios estabelecidos;

- A aluna B, situou-se no nível 2 na Fase inicial por ter trocado o sinal + pelo sinal – na representação da operação aritmética subtração. Na Fase Final, demonstrou reconhecer o sentido retirar presente na situação problemática, relacionar as quantidades com os seus significados e funções, com uma resolução clara, onde comete um pequeno lapso, enquadrando-se assim no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos;
- O aluno C na Fase Inicial aparenta ter reconhecido a presença do sentido retirar na situação problemática, motivo pelo qual se situou no nível 2. Na Fase Final evidenciou reconhecer a presença do sentido retirar na situação problemática, compreender os significados e funções das quantidades envolvidas, com uma estratégia de resolução sem falhas, enquadrando-se no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos;
- o aluno D manteve o nível 3 dos critérios de análise, evidenciando crescente confiança no manipulativo virtual e compreender a relação entre os conceitos matemáticos envolvidos e as representações do manipulativo virtual.

2.4.5 Sentido completar

2.4.5.1 Fase Inicial

Individualmente, os alunos procuraram responder à seguinte situação problemática: “A caixa de marcadores da Rita tem espaço para 12 marcadores, mas ainda só tem 9. Quantos marcadores pode comprar a Rita para ficar com a caixa cheia?” (cf. Apêndice 3, tarefa 4).

O aluno A apenas tenta uma representação das quantidades que apaga (Figura 36). Não existem evidências de qualquer tentativa de resolução, que tenha reconhecido a presença do sentido completar na situação problemática ou compreendido o significado das quantidades, encontrando-se assim no nível 1 dos critérios estabelecidos.

A aluna B, ao interpretar a situação problemática como uma adição (Figura 37), evidencia não reconhecer a presença do sentido completar da subtração na situação

problemática – ainda que o tenha usado intuitivamente para obter a quantidade em falta –, assim como da subtração enquanto operação inversa da adição, motivo pelo qual se enquadra no nível 1 dos critérios estabelecidos.

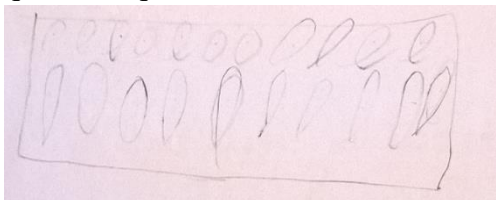


Figura 36 – Resolução do aluno A

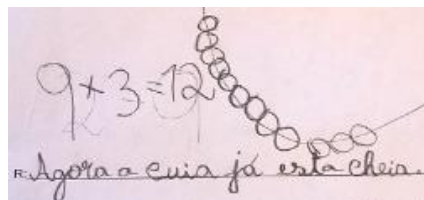


Figura 37 – Resolução da aluna B

Os alunos C (Figura 38) e D (Figura 39), ainda que reconheçam a presença do sentido completar na situação problemática, exprime formalmente a sua interpretação através da operação adição, na forma *missing addend*, como estratégia de resolução em conjunto com a representação do colar de contas, a que o aluno D acrescenta também a reta numérica. As evidências colocam os alunos no nível 2 dos critérios estabelecidos.

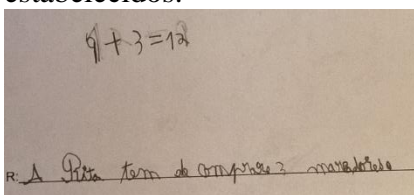


Figura 38 – Resolução do aluno C

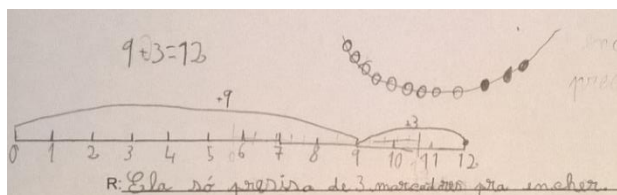


Figura 39 – Resolução do aluno D

2.4.5.2 Fase de Intervenção

Grupo 1:

No início da sessão, o par decide que cada um resolve uma das subtrações da tarefa 1 (cf. Apêndice 7). A aluna B, apesar de sentir algumas dificuldades na manipulação do rato, representa as quantidades do aditivo e do subtrativo ($7 - 6$), para de seguida manipular a slide bar correspondente à diferença para representar o valor lido na reta numérica (Figura 40). À semelhança do seu par, também o aluno A representa as quantidades do aditivo e do subtrativo ($17 - 3$), interpreta a reta numérica e manipula a slide bar para representar o valor da diferença (Figura 41).

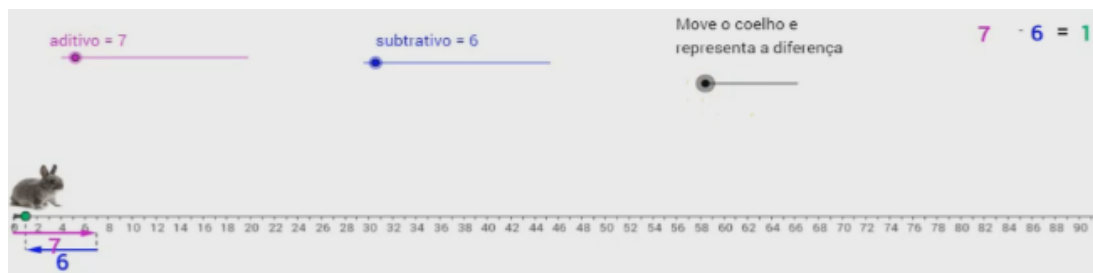


Figura 40 – Manipulação da aluna B

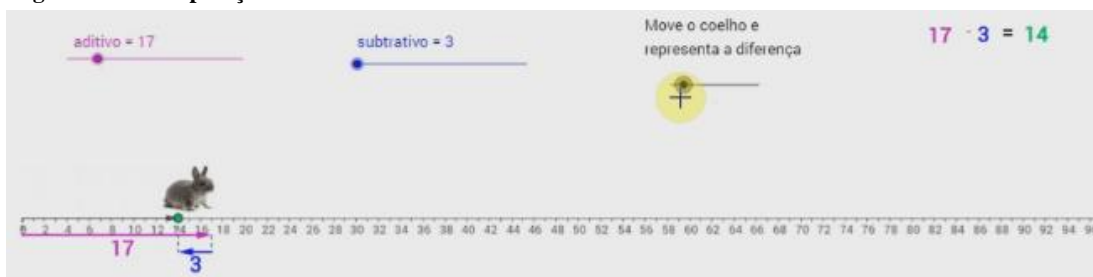


Figura 41 – Manipulação do aluno A

A rapidez e proficiência com que realizam as restantes subtrações da tarefa 1 sugerem que a mecânica da *applet*, assim como os conceitos de aditivo, subtrativo e diferença, estão compreendidos por ambos. A facilidade e correção com que interpretam a reta numérica, evidenciam que este conceito e a sua aplicação, neste caso através da manipulação da *applet*, são já conhecimentos interiorizados nas aprendizagens dos alunos A e B.

Durante a tarefa 2 (cf. Apêndice 7), após leitura do enunciado pela aluna B, é feita uma divisão de tarefas, cabendo à aluna B a representação do aditivo, subtrativo e diferença, enquanto o registo escrito fica a cargo do aluno A. Após interpretarem a situação problemática, representam corretamente as quantidades correspondentes ao aditivo e subtrativo, manipulando de seguida a *slide bar* para obter a diferença lida na reta numérica (Figura 42).

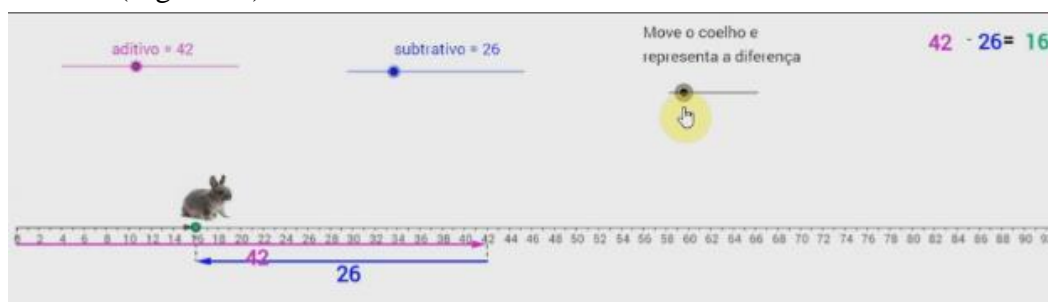


Figura 42 – Resposta à tarefa 2

Registada a expressão numérica na folha de exploração ($42 - 26 = 16$), discutem a resposta ao problema:

Aluno A: Então são 42 lugares e estão partidos 26.

Aluna B: Não, isso é uma conta e tem de ser uma resposta. Do 1.º B só podem ir 16 meninos. Queres escrever? – o aluno A concorda e regista a resposta do par.

Na tarefa 3, de exploração livre, o aluno A cria e resolve a subtração $14 - 10 = 4$ na *applet* e a aluna B opta por $93 - 26 = 67$. Mais tarde, durante a discussão, o grupo pediu a palavra:

PE: Nós queríamos saber o quê?

Aluna B: Quantas é que ainda podiam ir no autocarro.

PE: E para isso nós precisávamos de saber os lugares...

Aluna B: Todos... podemos dizer a nossa resposta?

PE: Sim.

Aluno A: Do 1.º B só podem ir 16 alunos.

PE: E porque é que só podem ir 16?

Aluno A: Porque a maioria do 1.º A vai – referindo-se à totalidade da turma, 26 alunos, como maioria –, o que deixa apenas alguns lugares livres.

Este excerto do diálogo sugere compreensão do sentido completar presente na situação problemática, que em consonância com o que vem sendo relatado, evidencia uma progressiva melhoria do aluno A, já que na Fase Inicial não conseguia sequer reconhecer a presença do sentido completar da subtração, sendo agora capaz de o fazer, além de compreender o significado das quantidades em jogo e a relação da diferença com a resposta à situação problemática.

Grupo 2:

Depois de lerem a folha de trabalho (cf. Apêndice 7), os elementos do grupo decidem a distribuição de tarefas, sendo o aluno C quem resolve a primeira subtração ($7 - 6$) com a *applet*. A operação permite aos alunos calcular mentalmente a diferença de imediato:

Aluno D: 7 menos 6 é 1, isso nem dá para ver.

Aluno C: Dá pois.

Mais uma vez, a *applet* permitiu aos alunos colocar e verificar hipóteses através do feedback e validação imediata das tarefas (Figura 43). A representação da subtração seguinte ($17 - 3$) dá origem a mais uma discussão acerca da mecânica de manipulação da *applet*:

Aluno C: Não precisas de apagar. Isto estava no 7, bastava pões mais uma dezena.

Aluno D: Então é quanto?

Aluno C: 7 mais uma dezena?

Aluno D: 17.

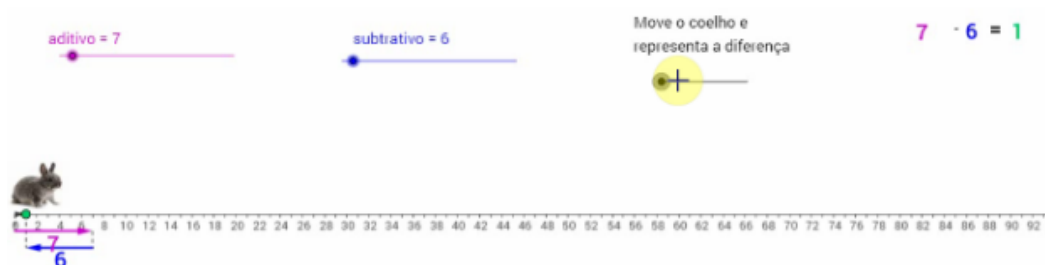


Figura 43 – Feedback e validação da tarefa pela *applet*

Este excerto do diálogo entre os alunos evidencia a vantagem do trabalho a pares, não só no que diz respeito a ultrapassar dificuldades relacionadas com a mecânica da *applet*, mas também como espaço que fomenta a comunicação matemática e estimula o uso de linguagem matemática adequada.

O aluno D tem dificuldade na manipulação precisa do rato, o que torna a tarefa muito morosa e cria alguma tensão em ambos devido ao tempo de espera e frustração em concluir a tarefa. Nas restantes subtrações da tarefa 1 ($22 - 5$; $38 - 18$ e $83 - 44$), conseguem representar as quantidades correspondentes ao aditivo e subtrativo, assim como o valor da diferença lido na reta numérica.

Ambos os alunos continuam a demonstrar curiosidade em testar os limites da *applet*, como é evidente na exploração feita pelo aluno D (Figura 44):

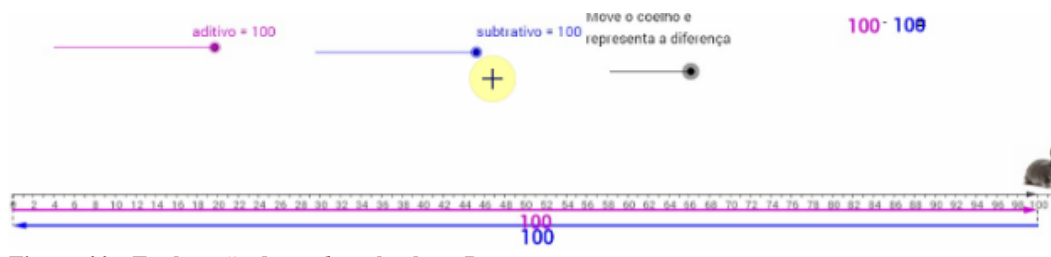


Figura 44 – Exploração da *applet* pelo aluno D

Aluno D: Olha, 100-100.

Aluno C: É zero.

Aluno D: Agora temos de voltar às contas. É 38 menos quanto?

Aluno C: Menos uma dezena e oito unidades.

Antes de iniciarem a resolução da situação problemática (cf. Apêndice 7, tarefa 2), tem lugar uma nova divisão de tarefas. O aluno C fica encarregue da manipulação da *applet* e o aluno D de registar a resposta à situação problemática na folha de exploração:

Aluno C: Vamos lá ver.

Aluno D: Então é 42.

Aluno C: 47.

Aluno D: 42 é o que está lá escrito – o aluno C representa 42 no aditivo – e ocuparam 26.

Aluno C: Não não. Não vai ser assim.

Aluno D: Sim, e sabemos quantos faltam. Quantos podem ir do B – convencido, o aluno C representa a quantidade indicada no subtrativo.

Aluno C: Quantos podem ir?

Ambos: 16 – lendo o valor na reta numérica, que o aluno C representa de seguida manipulando a *slide bar* da diferença (Figura 45).

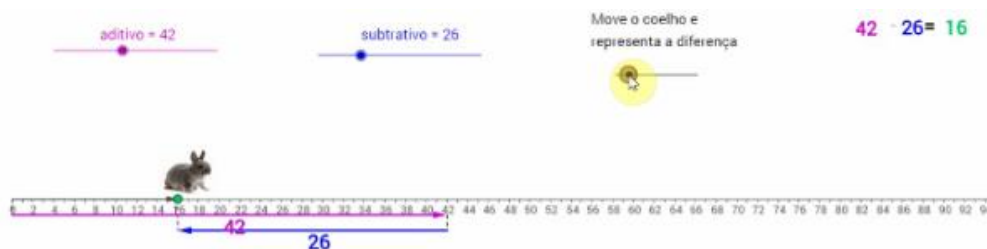


Figura 45 – Resolução da situação problemática

Terminada a resolução da situação problemática, o aluno D regista a resposta na folha de exploração: “Só podem ir 16 pessoas do 1º Ber ao autocarro azul.” No espaço destinado a explorarem livremente a *applet*, o aluno C representa e resolve as subtrações $100 - 31 = 69$ e $100 - 71 = 29$ e o aluno D a subtração $58 - 32 = 26$.

Na avaliação da sessão, ambos os alunos mencionam ter gostado de trabalhar em conjunto e de terem oportunidade de criar subtrações livremente. Quando questionados pelo PE acerca de algumas das subtrações realizadas, identificaram corretamente e sem hesitar o significado das quantidades representadas (aditivo, subtrativo e diferença).

Ao contrário do aluno D, o aluno C considerou ser mais difícil de trabalhar com a reta numérica desta vez do que na sessão anterior, afirmação coerente com o que foi observado.

2.4.5.3 Fase Final

Individualmente, os alunos procuraram responder à seguinte situação problemática: “O livro de matemática da escola Solum Norte tem 83 páginas. A turma do 1.º B já vai na página 76. Quantas páginas faltam para terminarem o livro?” (cf. Apêndice 5, tarefa 4).

O aluno A não compreende que a situação problemática remete para o sentido completar da subtração, além disso, a sua resolução da adição contém erros processuais (Figura 46), enquadrando-se no nível 1 dos critérios de análise estabelecidos.

A aluna B reconhece o sentido completar presente na situação problemática, identifica os dados correspondentes ao aditivo e subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática (Figura 47). Opta por uma estratégia de resolução, na qual comete um erro de cálculo em um dos passos [$13 - 6 = 9$, como é possível verificar na Figura 47], obtendo um valor incorreto para a diferença. A análise dos dados permite enquadrar a aluna no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos, já que a falha na resolução é processual, sem influência na compreensão.

83 + 76 = 53
 15
 O livro de matemática da escola Solum Norte tem 53 livros.

Figura 46 – Resolução do aluno A

$83 - 76 = 83 - 70 - 6 = 13 - 6 = 9$
 Faltam 9 páginas.

Figura 47 – Resolução da aluna B

Os alunos C (Figura 48) e D (Figura 49) reconhecem o sentido completar presente na situação problemática, identificam os dados correspondentes ao aditivo e subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática. Ao contrário do aluno D, o aluno C comete um erro de cálculo mental, razões que justificam enquadrar os alunos no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

$83 - 76 = 13$
 R: Faltam 13 páginas para acabarem o livro.

Figura 48 – Resolução do aluno C

$83 - 76 = 7$
 R: Faltam 7 páginas para acabarem o livro de matemática.

Figura 49 – Resolução do aluno D

2.4.5.4 Síntese

O uso correto da linguagem matemática adequada, a importância do trabalho a pares para superar obstáculos e criar espaço para a comunicação matemática, a capacidade dos manipulativos virtuais proporcionarem feedback e validação imediata das tarefas, permitirem que os alunos coloquem, verifiquem hipóteses e visualizem conceitos e relações matemáticas são aspetos cada vez mais presentes nos resultados apresentados.

No que diz respeito à compreensão do sentido completar da subtração, com suporte nas evidências, pode-se afirmar que os alunos alcançaram um nível de compreensão mais profundo, particularmente no que concerne ao significado das quantidades, a sua relação com a estrutura da operação aritmética subtração e a relação da diferença com a resposta à situação problemática. A maioria dos alunos atingiu o nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

O aluno A manteve o nível 1 na Fase Inicial e na Fase Final, no entanto, na fase de intervenção evidenciou ter reconhecido o sentido completar, assim como o significado das quantidades envolvidas. É também visível uma melhoria na Fase Final em relação à Fase Inicial, apesar de não reconhecer a presença do sentido comparar, tentou uma resolução da situação problemática e procurou dar significado às quantidades do envolvidas, ainda que de forma incorreta, demonstrando sentir-se mais confiante e motivado em tarefas matemáticas.

A aluna B passou do nível 1 na Fase Inicial, em que não reconheceu a presença do sentido completar, para na Fase Final alcançar o nível 3 dos critérios de análise estabelecidos, o que denota um aprofundamento na compreensão do sentido completar da subtração. Na Fase Final reconheceu a presença do sentido completar na situação problemática, compreendeu o significado e funções das quantidades envolvidas para a resolução, justificando-se assim a sua evolução.

Os alunos C e D passaram do nível 2 na Fase Inicial para o nível 3 na Fase Final, abandonando a estratégia aditiva na resolução da situação problemática. Na Fase Final reconheceram a presença do sentido completar na situação problemática, compreenderam o significado e funções das quantidades envolvidas para a resolução,

motivos pelos quais se enquadram no nível mais elevado dos critérios de análise estabelecidos.

2.4.6 Sentido comparar

2.4.6.1 Fase Inicial

Individualmente, os alunos procuraram responder à seguinte situação problemática: “O Algodão e a Guga são duas zebras. O algodão tem 10 riscas pretas e a Guga tem 15. Quantas riscas tem a Guga a mais do que o Algodão?” (cf. Apêndice 3, tarefa 5).

Tal como nas restantes situações problemáticas que envolvem os sentidos da subtração, o aluno A apenas tenta representar as quantidades (Figura 50). Não existem evidências de qualquer tentativa de resolução, encontrando-se no nível 1 dos critérios de análise estabelecidos.

A aluna B, ao interpretar o problema como uma adição, evidencia não compreender totalmente o sentido completar da subtração, assim como da subtração enquanto operação inversa da adição (Figura 51). No entanto, a sua resposta escrita recorre ao sentido comparar, motivo pelo qual se enquadra no nível 2 dos critérios de análise estabelecidos.

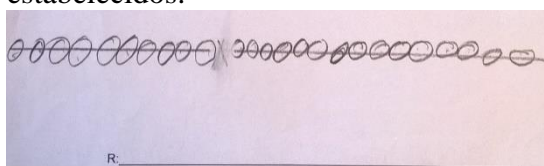


Figura 50 – Resolução do aluno A

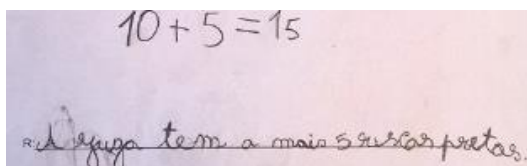


Figura 51 – Resolução da aluna B

O aluno C escolhe uma estratégia que permite comparar duas quantidades, não é claro se usou uma estratégia de contagem ou se reconheceu e recorreu ao sentido comparar da subtração (Figura 52). As evidências colocam o aluno no nível 2 dos critérios de análise estabelecidos

O aluno D opta pela representação do colar de contas como estratégia para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a presença do sentido comparar na situação problemática (Figura 53). No entanto, não atribui o significado correto às quantidades na operação subtração, comparando o aditivo com o valor que

na realidade corresponde à diferença. As evidências colocam o aluno no nível 2 dos critérios de análise estabelecidos.

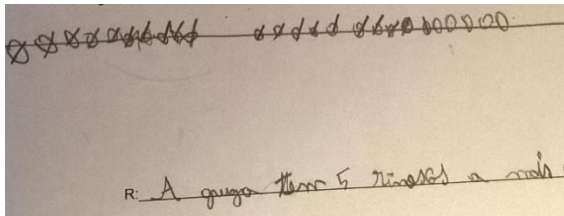


Figura 52 – Resolução do aluno C

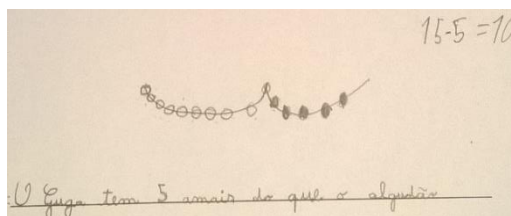


Figura 53 – Resolução do aluno D

2.4.6.2 Fase de Intervenção

Grupo 1:

Depois de lerem o enunciado da tarefa 1 (cf. Apêndice 7), estabelecem uma divisão de tarefas, sendo será a aluna B primeiro a “fazer uma conta” e a manipulação da *applet* seguidamente pelo aluno A. O primeiro obstáculo com que se deparam prende-se com a interpretação da situação problemática: qual dos dados corresponde ao aditivo e ao subtrativo. O aluno A sugere que o aditivo é 57 porque “está primeiro”, a aluna B discorda. Não conseguem chegar a um consenso e o conflito escala até que o aluno A magoa a aluna B. Face a esta situação o aluno A não participou na resolução da tarefa.

A aluna B não consegue interpretar a situação problemática e solicita o auxílio do PE, que a questiona acerca da possibilidade de a informação que precisam estar algures na folha de exploração. Alertada para a presença da informação gráfica, consegue prosseguir. Uma vez obtidos os dados da situação problemática, representa as quantidades referentes ao aditivo e ao subtrativo para de seguida interpretar a reta numérica e representar a diferença na *applet* (Figura 54). Esta manipulação da aluna B relativa às quantidades do subtrativo e do aditivo sem hesitação evidencia a compreensão do sentido comparar da subtração presente na situação problemática,

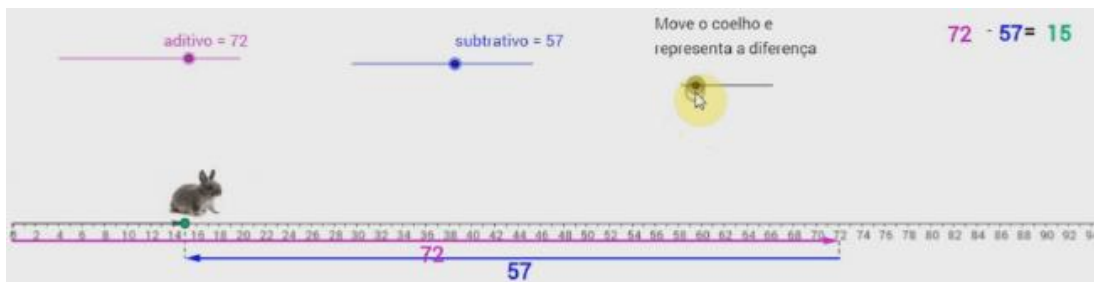


Figura 54 – Manipulação da aluna B

sendo capaz de relacionar a diferença obtida com a resposta à situação problemática – “A diferença 15 litros de água”.

Terminada a primeira tarefa, a aluna B dedica-se à seguinte, que consiste em criar e resolver subtrações. Sem dificuldade alguma, a aluna B resolve todas as subtrações criadas ($10 - 49 = 51$; $36 - 16 = 20$; $55 - 54 = 1$; $100 - 0 = 0$), é, no entanto, surpreendida por alguns valores que diferem da sua estimativa, evidência que reforça a valência da *applet* de permitir colocar e testar hipóteses através do feedback e validação imediata das tarefas, ao mesmo tempo que permite o trabalho autónomo dos alunos.

Após o aluno A se ter desculpado perante o par, retoma o seu lugar e participa na tarefa 2 da folha de exploração. A aluna B sugere que o aluno A faça mais três subtrações, uma vez que, tal como diz, “eu já fiz muitas”. À semelhança da sua colega, o aluno A cria e resolve subtrações ($100 - 1 = 99$; $81 - 18 = 63$; $13 - 5 = 8$) sem dificuldade (Figura 55).

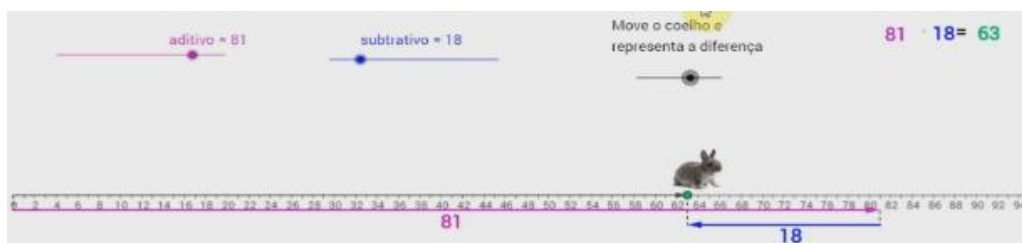


Figura 55 – Manipulação do aluno A

Grupo 2:

Desta vez, a interpretação da situação problemática (cf. Apêndice 7, tarefa 1) foi mais demorada. Antes de conseguirem atribuir o significado correto às quantidades envolvidas, necessitaram de obter o valor da representação visual. O aluno C insiste em contar todos os cubos, enganando-se diversas vezes na contagem, recusando-se a aceitar a sugestão do par: “Não é assim que se conta, 6 é 62. Ora vê, 6 dezenas e duas unidades”. Chegam a um consenso e seguem a sugestão do aluno D, “É 62 menos 56.”

Ultrapassada esta fase, iniciam a resolução da situação problemática com a representação das quantidades correspondentes ao aditivo e ao subtrativo. Ao representar as quantidades, o aluno C insiste em fazer corresponder os valores do

aditivo e do subtrativo à ordem em que surgem no enunciado, evidenciando não compreender o significado das quantidades envolvidas. O aluno D não concorda e verbaliza a sua opinião: “Ai... é 62 menos 56, assim é menos certo. Tu não vais conseguir, a conta está mal!” Confrontado com a representação no ecrã (Figura 56), o aluno C ainda tem alguma dificuldade em aceitar que a hipótese está incorreta: “Impossível!”, ao que o aluno D responde “A conta está mal.”

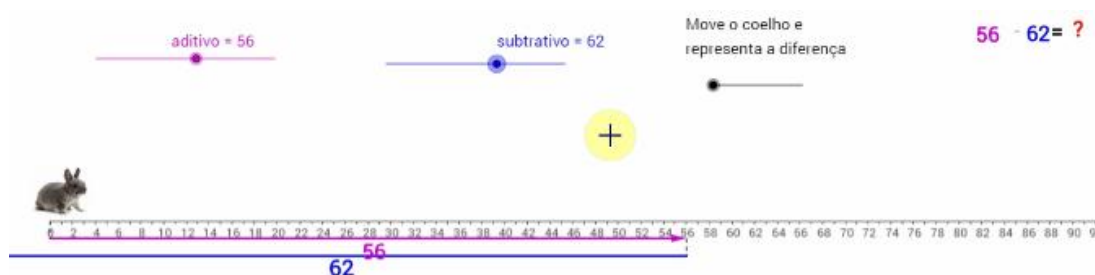


Figura 56 – Manipulação do aluno C

Antes de encetarem uma nova tentativa, surge uma conversa paralela com outro grupo, em que um dos alunos diz “a nossa conta é maior.”, ao que o aluno C responde: “Isso é mau, gastam muita água, mas eles não gastam quase nada”, aludindo a outro grupo com um consumo de água muito reduzido. Este pequeno diálogo evidencia a importância de usar situações problemáticas com base na realidade, principalmente quando se trabalha com a MMCAA, ainda mais reforçado se for também um conteúdo curricular cujas implicações e relações sejam conhecidas dos alunos.

De volta à tarefa em mãos, a recusa do aluno C em aceitar a sugestão do par, faz com que demorem muito tempo a conseguirem dar o próximo passo, conseguido apenas após uma intervenção do PE: “Acho que sim D, estás no caminho certo. Agora conversa com o C para verem como fazer”. O aluno C aceita testar a hipótese de resolução do par e chegam facilmente a um valor para a diferença (Figura 57), registando de seguida a resposta à situação problemática: “A diferença é de 6.”

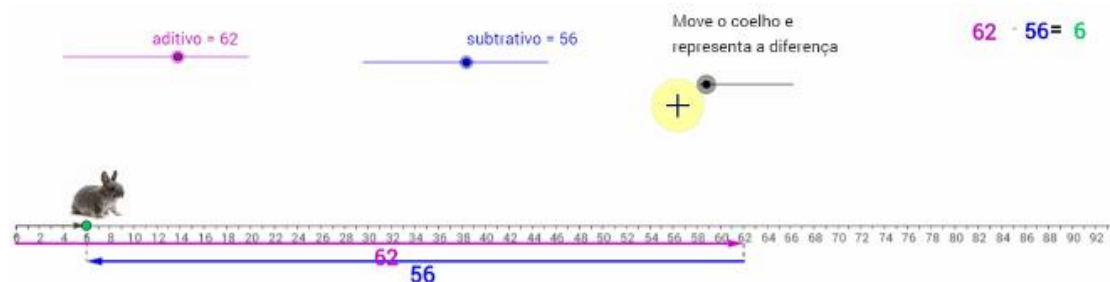


Figura 57 – Resolução da situação problemática

Da análise do que foi feito pelos alunos C e D, é possível inferir que reconheceram o sentido comparar presente na situação problemática, atribuíram significado às quantidades envolvidas e estabeleceram uma relação entre a diferença entre a diferença e a resposta à situação problemática. É também possível reconhecer a importância do trabalho a pares, particularmente da influência do contributo do aluno D no desempenho e processo de aprendizagem do aluno C.

Na tarefa seguinte, criar e resolver subtrações à escolha, o aluno C fez três subtrações ($100 - 91 = 9$; $90 - 18 = 72$ e $100 - 69 = 31$) e o aluno D duas ($100 - 88 = 12$ e $63 - 56 = 7$) sem qualquer dificuldade.

Durante a discussão, uma vez que não registaram a subtração, o aluno C não se recordava das quantidades usadas. Já o aluno D, foi mais esclarecedor na sua explicação do que fizeram:

PE: Como é que vocês fizeram na reta numérica?

Aluno D: Fizemos 62.

PE: E o que era o 62 da reta numérica?

Aluno D: O aditivo.

PE: E depois?

Aluno D: Tirámos o 56 que era o subtrativo e depois fizemos a diferença que era o coelho, o 6.

PE: Então podes ler a resposta?

Aluno D: A diferença é de 6.

A explicação do aluno D foi mais clara do que a do aluno C, recorrendo a linguagem matemática adequada, no entanto devido ao contributo de outro grupo, ficou perceptível que era necessário acrescentar algo: “Temos de dizer se a diferença é a mais ou a menos do que na casa do Ricardo”.

Da leitura da discussão em grande grupo, destacam-se as evidências que confirmam a vontade de usar de linguagem matemática adequada e do contributo da MMCAA ao possibilitar confrontar ideias, hipóteses e estratégias na validação dos resultados

matemáticos, reformular o que foi feito e aprofundar a compreensão do modelo aplicado.

2.4.6.3 Fase Final

Individualmente, os alunos procuraram responder à seguinte situação problemática: “A Académica fez 25 pontos neste campeonato de futebol. No anterior fez 39. Qual é a diferença de pontos conseguidos nos dois campeonatos?” (cf. Apêndice 5, tarefa 5).

O aluno A compreende que a situação problemática remete para o sentido comparar da subtração. A sua tentativa de resolução indica que 25 é menor que 39 e a resposta produzida não vai ao encontro da situação problemática (Figura 58). Estas evidências colocam o aluno no nível 1 dos critérios de análise estabelecidos.

A aluna B reconhece o sentido comparar presente na situação problemática, identifica os dados correspondentes ao aditivo subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática (Figura 59). Opta por uma estratégia de cálculo, sem falhas na sua aplicação, motivos que justificam enquadrar a aluna no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

Handwritten work of student A. At the top, the calculation $25 - 39 =$ is written. Below it, the conclusion is written in Portuguese: "A diferença é entre o número 39."

Figura 58 – Resolução do aluno A

Handwritten work of student B. At the top, the calculation $39 - 25 = 14$ is written. Below it, the conclusion is written in Portuguese: "A diferença é 14."

Figura 59 – Resolução da aluna B

Os alunos C (Figura 60) e D (Figura 61) reconhecem o sentido comparar presente na situação problemática, identificam os dados correspondentes ao aditivo e subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática, sem qualquer erro na implementação da estratégia de resolução escolhida, motivos que justificam enquadrar os alunos no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

Handwritten work of student C. At the top, the calculation $39 - 25 = 14$ is written. Below it, the conclusion is written in Portuguese: "A diferença é de 14."

Figura 60 – Resolução do aluno C

Handwritten work of student D. At the top, the calculation $39 - 25 = 14$ is written. Below it, the conclusion is written in Portuguese: "A diferença é de 14."

Figura 61 – Resolução do aluno D

2.4.6.4 Síntese

O uso correto da linguagem matemática adequada, a importância do trabalho a pares para superar obstáculos e criar espaço para a comunicação matemática, a capacidade dos manipulativos virtuais proporcionarem feedback e validação imediata das tarefas permitirem que os alunos coloquem, verifiquem hipóteses e visualizem conceitos e relações matemáticas, a importância de usar situações problemáticas com base na realidade, principalmente quando se trabalha com a MMCAA, são aspetos que continuam a marcar presença nos resultados apresentados.

No que diz respeito à compreensão do sentido comparar da subtração, com suporte nas evidências, pode-se afirmar que os alunos alcançaram um nível de compreensão mais profundo, particularmente no que concerne ao significado das quantidades, a sua relação com a estrutura da operação aritmética subtração e a relação da diferença com a resposta à situação problemática. A maioria dos alunos atingiu o nível 3 dos critérios de avaliação.

O aluno A manteve o nível 1 na Fase Inicial e na Fase Final. É também visível uma melhoria na Fase Final em relação à Fase Inicial, reconheceu a presença do sentido comparar na situação problemática, tentou uma resolução da situação problemática e procurou dar significado às quantidades envolvidas, ainda que sem sucesso.

Os alunos B, C e D, por motivos distintos, enquadraram-se na Fase Inicial no nível 2 dos critérios de análise estabelecidos. A aluna B traduziu a situação problemática como uma adição, não sendo claro se reconheceu a presença do sentido comparar na situação problemática. O aluno C recorreu a uma representação do colar de contas como estratégia de resolução que não permite compreender se reconheceu a presença do sentido comparar da subtração na situação problemática. Por fim, o aluno D evidencia reconhecer a presença do sentido comparar na situação problemática, mas não atribui o significado correto às quantidades envolvidas. Na Fase Final, os três alunos reconheceram a presença do sentido comparar na situação problemática, compreenderam o significado e função das quantidades envolvidas para a resolução da situação problemática, motivos pelos quais se enquadram no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

2.4.7 Sentido juntar

2.4.7.1 Fase Inicial

Individualmente, os alunos procuraram responder à seguinte situação problemática: “O António gosta muito de ver filmes. Na sua coleção tem 6 filmes sobre animais e 8 sobre super-heróis. Quantos filmes tem o António?” (cf. Apêndice 3, tarefa 1).

O aluno A utiliza a representação do colar de contas como estratégia de resolução, reconhecendo o sentido juntar presente na situação problemática e os dados correspondentes a cada parcela da operação que efetua (Figura 62). No entanto, não estabelece qualquer relação entre a soma e a resposta à situação problemática, encontrando-se no nível 1 dos critérios de análise estabelecidos.

A aluna B opta pela representação do colar de contas como estratégia de resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, reconhecendo a presença do sentido juntar na situação problemática, o significado das quantidades e estabelece uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática (Figura 63). As evidências colocam a aluna no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

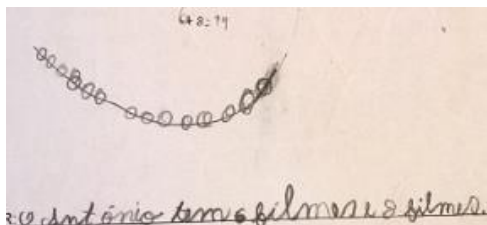


Figura 62 – Resolução do aluno A

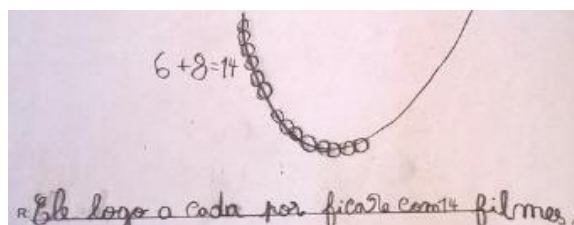


Figura 63 – Resolução da aluna B

O aluno C opta pela representação do colar de contas como estratégia de resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a presença do sentido juntar na situação problemática, compreende o significado das quantidades envolvidas e estabelece uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática (Figura 64). As evidências colocam o aluno no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

O aluno D opta pela representação do colar de contas e reta numérica como estratégias para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a presença do sentido juntar na situação problemática, compreende o significado das quantidades envolvidas e estabelece uma relação entre a soma e a resposta à situação

problemática (Figura 65). As evidências colocam o aluno no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

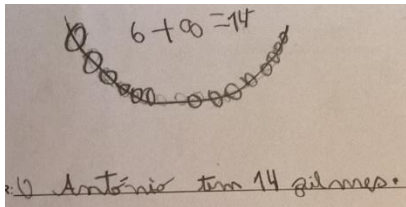


Figura 64 – Resolução do aluno C

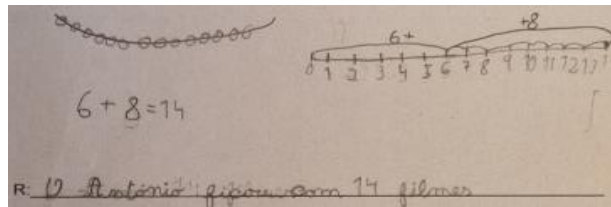


Figura 65 – Resolução do aluno D

2.4.7.2 Fase de Intervenção

Grupo 1:

Os alunos A e B iniciaram a representação de ambas as parcelas com uma curiosa leitura da operação ($34 + 28$). Colocaram de imediato 6 dezenas num dos espaços, do seu discurso é possível inferir que pretendiam distribuir as dezenas da seguinte forma: 3 na primeira parcela, 2 na segunda e decompor a dezena remanescente em unidades para distribuir pelas parcelas (Figura 66). A divisão de tarefas e manipulação conjunta do rato fez com que perdessem o raciocínio.

Depois de conversarem tentam uma nova estratégia, no entanto, a personalidade conflituosa do aluno A dificultou o processo, rejeitando as propostas da colega e recusando-se a partilhar o computador ou a ouvir e respeitar os colegas, chegando mesmo a magoar novamente a aluna B – esta atitude do aluno A, levou à sua exclusão temporária da atividade. A aluna B prossegue e opta por uma estratégia em que faz parte da operação mentalmente (3 dezenas mais 2 dezenas, e 4 unidades mais 8 unidades), representando 5 dezenas e 12 unidades na *applet* (Figura 67).

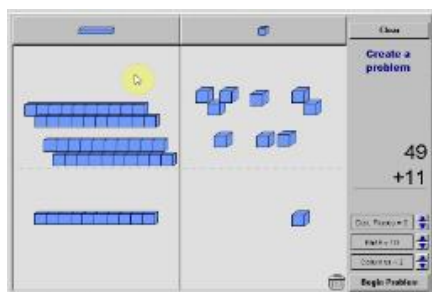


Figura 66 – Tentativa de representar $34+28$

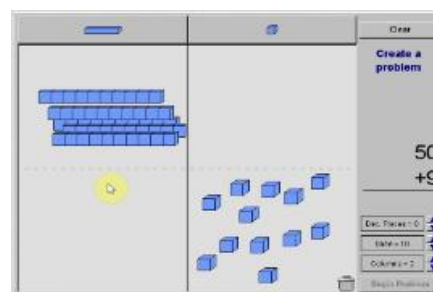


Figura 67 – Manipulação da aluna B

O longo período sem contacto com o software fez com que esquecesse a sua mecânica, particularmente o que diz respeito à localização das diferentes parcelas. A aluna B realizou várias sucessões de tentativa/erro, sem sucesso. Decidiu então pedir a

colaboração do seu par, assumindo a competência deste na manipulação da *applet*, valorizando o contributo positivo do aluno A em detrimento das atitudes negativas. Novamente em colaboração, realizam mais uma tentativa (Figura 68), desta vez com valores diferentes da situação problemática ($44 + 18$). Um erro na interpretação do algoritmo leva o aluno A a afirmar que “o resultado é 1”.

Uma nova leitura do enunciado, por sugestão do PE, leva a mais uma tentativa de resolução. Como não se recordam do processo de resolução, solicitam auxílio. As respostas às questões colocadas pelo PE, levaram o par ao agrupamento de unidades em dezenas – “as unidades são só 1,2,3,4,5,6,7,8,9” aluna B; “vou fazer um coisinho destes e assim faz a conta”, aluno A ao descrever a manipulação dos cubos para os agrupar numa barra (Figura 69), compondo uma unidade de ordem superior.

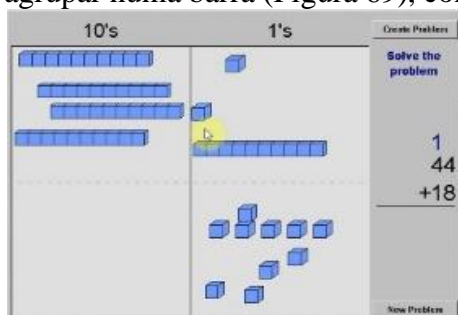


Figura 68 – Representação da operação $44+18$



Figura 69 – Manipulação do aluno F

Concluída a resolução, registam a resposta à situação problemática: “Vão sessenta e dois meninos.” As evidências sugerem que os alunos reconheceram a presença do sentido juntar na situação problemática, compreenderam o significado das quantidades e estabeleceram uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática.

O par despendeu todo o tempo na resolução do problema. A falta de oportunidade para exploração autónoma, levou o aluno A a fazê-lo durante a discussão em grande grupo, perdendo assim o contributo dos restantes colegas, para além de se excluir da discussão.

Na avaliação da sessão, o contributo da aluna B limitou-se ao comportamento negativo do colega, ao passo que o aluno A ignorou esse aspeto, focando-se na componente lúdica da sessão. É inegável que as atitudes disruptivas do aluno A condicionaram a prestação e aprendizagens do par, no entanto, as evidências indicam como benéfica para ambos a colaboração, reconhecendo a aluna B a competência do aluno A na

manipulação da *applet* e o aluno A a contribuição matemática da aluna B na resolução das tarefas.

Grupo 2:

Os alunos C e D leem o enunciado da situação problemática (cf. Apêndice 7, tarefa 1) e reconhecem de imediato a presença do sentido juntar da adição, partindo para a representação das parcelas na *applet*, de acordo com o significado que atribuem às quantidades envolvidas. Embora já não se recordem completamente da mecânica da *applet*, ambos os alunos exploram várias opções, modificando a disposição dos objetos, sem sucesso. Como não se conseguem lembrar como se compõe uma unidade de ordem superior, decidem pedir ajuda ao PE.

Tendo em conta que este é um obstáculo comum à grande maioria dos grupos, o PE opta por se dirigir a toda a turma:

PE: Estão muitos meninos e meninas a perguntar como se faz a seguir. É normal, a última vez que trabalhámos com este programa já foi há muito tempo. Podem olhar para o ecrã, por favor. Olhem para as unidades. Quantas unidades é que tens D?

Aluno D: ao todo?

PE: sim.

Aluno D: 12.

PE: 12. E podem ter 12 unidades?

Turma em coro: Sim/Não.

PE: Quem é que acha que sim? (alguns alunos respondem levantando o braço)

Quem é que acha que não? (alguns alunos respondem levantando o braço)

Porque é que não podemos ter 12 unidades?

Aluna M: Depois das 10 unidades é uma dezena.

PE: Ouviram o que disse a M? A partir do momento em que temos 10 unidades, passa a ser uma...

Todos: Dezena (em coro).

PE: E como é que nós transformamos 10 unidades em uma dezena? Ainda se lembram? Lembram-se que é preciso agrupar?

Este momento de diálogo horizontal foi o suficiente para desbloquear a situação. O uso de manipulativos virtuais em sala de aula permite que os alunos desenvolvam trabalho autónomo, libertando o PE para acompanhar individualmente cada grupo, podendo inteirar-se do que vão fazendo de forma a decidir-se por indicações diferenciadas para cada grupo ou, como neste caso, orientar momentos de discussão em grande grupo.

Os alunos C e D regressam à sua tarefa, com o aluno D a dar o mote: “Só 4 unidades não dá para fazer, mais os oitos que estão ali.” Com o auxílio do aluno C – “Carregas no rato para isso ficar uma dezena” – consegue compor uma unidade de ordem superior, passando-a de seguida para a coluna das dezenas (Figura 70). Concluída a resolução da adição, registam a resposta na folha de exploração: “Vão 62 meninos participar na festa.”

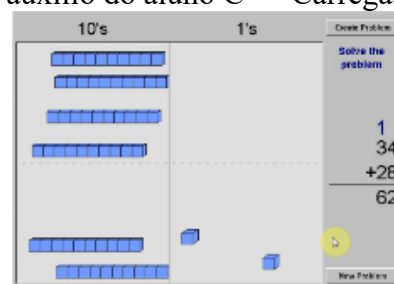


Figura 70 - resolução do aluno D

Na tarefa seguinte, os alunos criam e resolvem adições à escolha. O aluno C parece mais interessado em explorar a *applet* na vertente lúdica (Figura 71), já o aluno D decide criar uma situação problemática para resolver na *applet*. A estrutura do enunciado não é a mais correta e as diversas alterações que fez também não contribuíram para redigir um texto coerente. É, no entanto, possível reconhecer o sentido acrescentar da adição empregue pelo aluno D (Figura 72).

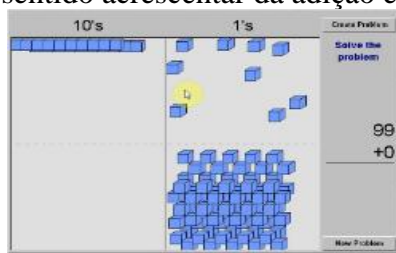


Figura 71 – Manipulação do aluno C

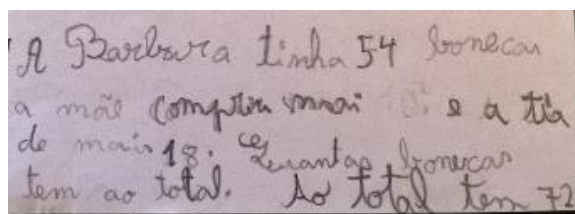


Figura 72 – Situação problemática criada pelo aluno D

Não houve tempo para concluir a resolução na *applet*, pois a manipulação do rato no processo de compor uma unidade superior é muito difícil para o aluno D, consequência da relação entre a dimensão do rato e da sua mão. Acaba por ter tempo para apenas representar as quantidades correspondentes a cada parcela (Figura 73). Este relato reforça o papel dos manipulativos virtuais na construção do conhecimento matemático

dos alunos, remetendo para uma das suas valências, permitir que os alunos possam criar e resolver situações problemáticas.

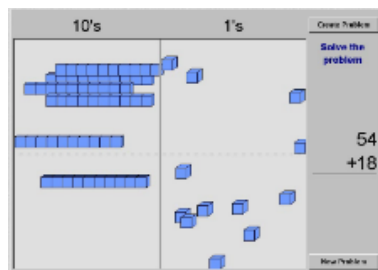


Figura 73 – Manipulação do aluno D

2.4.7.3 Fase Final

Individualmente, os alunos procuraram responder à seguinte situação problemática: “O Sérgio gosta muito do seu gato Farrusco. Já lhe comprou 46 bolas e 38 bonecos. Quantos brinquedos tem o Farrusco?” (cf. Apêndice 5, tarefa 1).

O aluno A, apesar de cometer alguns erros processuais com impacto no resultado final – não contabilizou a unidade de ordem superior composta ao somar 6 e 8 unidades –, evidencia compreender o sentido juntar, bem como a relação das quantidades com a estrutura da adição e entre a soma e a resposta à situação problemática (Figura 74). Uma vez que o erro do aluno não permite distinguir entre uma falha na resolução e uma lacuna na sua compreensão do valor de posição, enquadra-se no nível 2 dos critérios de análise estabelecidos.

A aluna B compreende a presença do sentido juntar presente na situação problemática e identifica os dados correspondentes a cada parcela, estabelecendo uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática, não conseguindo, no entanto, evitar um erro de contagem (Figura 75). As evidências enquadram a aluna no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos.

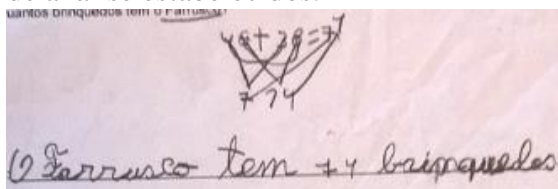


Figura 74 – Resolução do aluno A

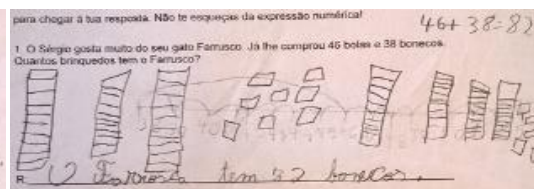


Figura 75 – Resolução da aluna B

Os alunos C (Figura 76) e D (Figura 77) compreendem a presença do sentido juntar presente na situação problemática e identificam os dados correspondentes a cada parcela, estabelecendo uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática,

sem qualquer erro na implementação da estratégia de resolução escolhida. As evidências enquadram os alunos no nível 3 dos critérios estabelecidos.

Handwritten work of student C. At the top, the equation $46 + 38 = 84$ is written. Below it, the response is written as "R: 1) sem gr. Farinosa tem 84 brinquedos".

Figura 76 – Resolução do aluno C

Handwritten work of student D. At the top, the equation is written as $46 + 38 = 40 + 6 + 30 + 8 = 40 + 30 + 6 + 8 = 78 + 6 = 84$. Below it, the response is written as "R: 1) Farinosa tem 84 brinquedos".

Figura 77 – Resolução do aluno D

2.4.7.4 Síntese

Como principais resultados, relativamente ao sentido juntar da adição, destacamos o uso correto da linguagem matemática adequada, a importância do trabalho a pares para superar obstáculos e criar espaço para a comunicação matemática, a capacidade dos manipulativos virtuais proporcionarem feedback e validação imediata das tarefas, permitirem que os alunos coloquem, verifiquem hipóteses e visualizem conceitos e relações matemáticas, criem e resolvam situações problemáticas, fomentarem o trabalho autónomo e criarem espaço para acompanhamento diferenciado pelo PE, o contributo do espaço de discussão criado pela MMCAA para superar obstáculos, reformular modelos e aprofundar conhecimentos matemáticos.

Com base nas evidências, pode-se afirmar que os alunos alcançaram um nível de compreensão mais profundo relativamente à compreensão do sentido juntar da adição, particularmente no que concerne ao significado das quantidades, a sua relação com a estrutura da operação aritmética adição e a relação da soma com a resposta à situação problemática. Na análise das gravações foi possível observar que os alunos C e D reconheceram o sentido na situação problemática de imediato, representaram as quantidades corretamente sem qualquer hesitação e estabeleceram a relação entre a soma e a resposta à situação problemática.

Todos os alunos reconheceram a presença do sentido juntar na situação problemática e compreenderam o significado e função das quantidades envolvidas, assim como a relação da soma com a resposta à situação problemática. Estas justificativas enquadram os alunos B, C e D no nível 3 dos critérios de análise estabelecidos, ficando o aluno A no nível 2, uma vez que cometeu um erro que aparenta remeter para uma lacuna na compreensão do valor de posição.

2.5 Discussão de resultados

De seguida apresenta-se o cruzamento dos dados obtidos com a revisão da literatura, de forma a permitir a discussão dos resultados e inferir as principais conclusões do estudo realizado (Quivy & Campenhoudt, 1998; Carmo & Ferreira, 1998; Berg, 2004).

Com base na análise dos resultados dos alunos nas tarefas escritas na Fase Inicial, foi possível mapear as dificuldades identificadas na secção 2.4.1., corroborando os resultados de outros estudos (Reis, 2014; Vieira, 2016; Sousa, 2016; Castelhana, 2016), nomeadamente o reconhecimento do sentido das operações presente nas situações problemáticas e a relação entre o significado das quantidades e a estrutura das operações aritméticas adição e subtração, bem como recorrer a estratégias aditivas na resolução de situações problemáticas quando estão presentes os sentidos completar e juntar.

Os resultados obtidos da análise das *screen recordings*, cruzados com os registos áudio e notas de campo, evidenciam ser vantajoso, para os grupos acompanhados, o trabalho a pares na superação de obstáculos e construção de aprendizagens significativas pelos alunos quando se opta pela MMCAA, como afirma Stender (2012).

A MMCAA, com situações problemáticas ancoradas na realidade (Blum & Niss, 1991; Ferri & Blum, 2013), contribuiu para a ocorrência de aprendizagens significativas, ao permitir que os alunos mobilizassem conhecimentos, matemáticos e extra matemáticos, em práticas de Modelação Matemática (Rosa & Orey, 2012) – neste caso específico, operações aritméticas (Usiskin, 2007), experienciando a aplicabilidade da matemática a situações do seu quotidiano (Blum & Niss, 1991), tal como sugerem alguns estudos (Caseiro & Ribeiro, 2012; Fernandes & dos Santos Junior, 2012; Castro, Santana, Neto, & Órfão, 2013; Sostisso, 2014; Renz Junior, 2015; Stohlmann, et al., 2016; Stillman, Blum, & Kaiser, 2017).

No que diz respeito ao uso de *applets* neste estudo, os alunos tiveram oportunidade de visualizar o significado dos sentidos da adição e da subtração, assim como compor em unidades de ordem superior e decompor unidades de ordem superior, (Lin, Shao, Wong, Li, & Niramitranon, 2011; Moyer-Packenham, Ulmer, & Anderson, 2012), tornando os conceitos e relações matemáticas mais perceptíveis para os alunos (Vaz,

Amado, & Carreira, 2017), particularmente evidente nos resultados do aluno A, de forma transversal, e nos restantes alunos nos sentidos da subtração comparar e completar. À semelhança do estudo de Gningue, Menil e Fuchs (2014), também aqui se verificou a motivação dos alunos para as tarefas, a importância do feedback instantâneo e validação imediata da tarefa pela *applet*, não só no trabalho autónomo dos alunos, mas também em outro aspeto menos visível, o acompanhamento diferenciado dos vários grupos pelo PE.

A escolha das *applets* de acordo com as suas valências e restrições, tendo em conta os objetivos específicos de cada sessão, como defendido por vários estudos (Drickey, 2000; Akihiko, 2002; Izydorczak, 2003; Dorward, 2004; Reimer & Moyer, 2005; Suh J. M., 2005; Shih, 2015; Suh & Moyer-Packenham, 2016), permitiu que os alunos realizassem trabalho autónomo e explorassem os manipulativos virtuais. Ao testar e validar hipóteses, estabeleceram relações entre os conceitos e as representações virtuais (Suh, Moyer, & Heo, 2005).

Os resultados dos alunos, vistos numa perspetiva diacrónica, corroboram o que é dito por alguns autores relativamente ao uso de manipulativos virtuais em ambientes de Modelação Matemática. Ao assegurar que os conceitos matemáticos são reforçados corretamente (Durmus & Karakirik, 2006; Suh & Moyer-Packenham, 2008; Burns & Hamm, 2011), criaram-se condições favoráveis para que os alunos conseguissem, de forma consistente, sistematizar e construir os conceitos e relações matemáticas necessárias para a compreensão das situações problemáticas propostas (Silva, 2015), nomeadamente: reconhecer os sentidos presentes em situações problemáticas, estabelecer relações entre o significado das quantidades envolvidas e a estrutura das operações aritméticas adição (parcelas e soma) e subtração (aditivo, subtrativo e diferença) e estabelecer relações entre as quantidades obtidas (soma e diferença) com a resposta às situações problemáticas. O uso de *applets*, recorrendo à Modelação Matemática como prática de sala de aula, contribuiu para que os alunos se tornassem mais competentes na resolução de situações problemáticas que envolvam os sentidos da adição e da subtração. À semelhança do que foi relatado por Ferreira (2012), esta competência acrescida tornou os alunos mais confiantes em tarefas matemáticas.

Comparando os resultados da Fase Inicial com os resultados da Fase Final (Quadro 5), verificamos que a compreensão dos sentidos da adição (juntar e acrescentar) e da subtração (retirar, completar e comparar) pelos alunos evoluiu, corroborando parte dos resultados já publicados deste estudo (Pratas, Rato, & Martins, 2016).

Quadro 5 – Níveis dos alunos nas Fases Inicial e Final

Sentidos	Nível dos alunos na Fase Inicial				Nível dos alunos na Fase Final			
	A	B	C	D	A	B	C	D
Juntar	1	2	3	3	3	3	3	3
Acrescentar	1	3	3	3	2	3	3	3
Retirar	1	2	2	3	2	3	3	3
Completar	1	1	2	2	1	3	3	3
Comparar	1	2	2	2	1	3	3	3
Global	1	2	2	3	2	3	3	3

Tendo em conta que o que foi aqui descrito é mais do que uma comparação de valores entre os níveis atingidos pelos alunos na Fase Inicial (cf. Apêndice 6) e na Fase Final (cf. Apêndice 8), é possível tecer algumas considerações relativamente ao impacto da integração de manipulativos virtuais, usando a MMCAA, na compreensão dos sentidos da adição e da subtração.

Ainda que aplicado a toda a turma, mas apenas analisado um reduzido número de alunos, os dados recolhidos parecem evidenciar que o uso combinado dos manipulativos virtuais com a Modelação Matemática como prática de sala de aula poderão trazer benefícios para a compreensão dos sentidos da adição e da subtração. As atitudes de cooperação no seio dos grupos, motivação para aprendizagem e autonomia nas tarefas evidenciada pelos alunos durante as sessões, parecem igualmente constituir-se como correlatos do ambiente de aprendizagem preferido pelos alunos para a aprendizagem, isto é, a exploração livre dos ambientes virtuais por parte dos alunos – confiantes no feedback e validação imediata das *applets* –, com uma intervenção comunicativa minimalista e diferenciada por parte do PE. Deste modo, o ambiente de aprendizagem escolhido pelos alunos poderá constituir-se como vantajoso para o processo de ensino e de aprendizagem.

A tecnologia de *screen recording*, enquanto ferramenta pedagógica, facilita ao professor, de forma crítica e detalhada, a análise da participação e envolvimento dos alunos nas tarefas, evidenciando situações que de outra forma poderiam permanecer

invisíveis. Este acompanhamento da compreensão do raciocínio dos alunos permite um conhecimento das suas dificuldades, competências e lacunas, criando condições para o professor reflexivo retroagir formativamente quase de forma imediata e individualizada.

2.6 Conclusões

Este estudo procurou dar resposta ao problema de investigação: de que forma a integração dos manipulativos virtuais nas práticas de sala de aula, usando a MMCAA, gera impactes positivos na construção do conhecimento dos alunos relacionado com a promoção do desenvolvimento dos sentidos da adição e da subtração?

Considerando os resultados apresentados, pode dizer-se que a proposta em discussão contribuiu de forma positiva para as aprendizagens dos alunos. Todos os elementos dos grupos 1 e 2 progrediram na compreensão dos sentidos da adição e da subtração, para além de outras competências matemáticas. É possível verificar a crescente proficiência dos alunos A, B, C e D na resolução de situações problemáticas, compreensão da estrutura da adição e da subtração, uma melhoria na comunicação matemática, aprofundamento da compreensão do valor de posição, significado de compor e decompor uma unidade de ordem superior (Ma, 2009) e evolução na capacidade de usar corretamente a reta numérica.

Além da observável melhoria dos alunos, relativamente à compreensão dos sentidos da adição e da subtração, argumenta-se que a integração de *applets* nas práticas de sala de aula, usando a MMCAA, contribuiu para que: os alunos se tornassem mais competentes e confiantes no envolvimento em tarefas matemáticas; a crescente autonomia dos alunos na consecução das tarefas propostas permitisse uma intervenção diferenciada por parte do PE (para alguns alunos centrada mais na manipulação do rato, para outros na gestão do funcionamento e relacionamento do par; procurar ajudar a desbloquear obstáculos que surgiam, colocar perguntas que possibilitavam estruturar as conclusões dos alunos; pedir para na discussão das tarefas partilharem algo específico que descobriam com o resto da turma; etc.); os alunos experienciassem a aplicabilidade da matemática curricular ao seu quotidiano; percecionassem o envolvimento em atividades matemáticas como prazerosa, desafiante e motivante.

A prática de sala de aula escolhida para este estudo, ao integrar o uso de *applets* com a MMCAA, permitindo que o PE tivesse uma intervenção marcada pela orientação diferenciada, garantiu aos alunos um espaço de decisão efetivo. Este, em conjunto com o trabalho colaborativo dos pares e feedback imediato proporcionado pelas *applets*, contribuíram para a autorregulação das aprendizagens matemáticas dos alunos (Zimmerman & Schunk, 1994; Winne & Perry, 2000; Boekaerts & Corno, 2005; Dias & Santos, 2010; Rosário et al., 2010; Kravčik & Klamma, 2014, Frison, 2016), evidenciada na persistência dos alunos quando confrontados com tarefas desafiantes, ou ao tentarem diferentes estratégias antes de pedirem ajuda (Mcleod, VaSinda & Dondlinger, 2012).

Outro aspeto evidenciado por este estudo, prende-se com a viabilidade da integração da tecnologia associada à MMCAA numa turma do 1.º ano do 1.º CEB, desde que se atenda ao contexto específico – não se pretende generalizar o que foi observado neste grupo de alunos. Ainda que estes alunos se encontrem numa etapa muito embrionária do desenvolvimento das suas competências de leitura e escrita, matemáticas e outras, caso as oportunidades de interação e exploração surjam de modo contextualizado e natural, fomentadas por uma prática intencional dos educadores, são estimulantes para a criança (Mata, 2007).

Para o desenvolvimento profissional na formação de professores, importa manter uma postura reflexiva, envolvendo-se em atividades estruturadas que promovam o hábito de refletir as práticas pedagógicas e o conhecimento envolvido (Artzt, Armour-Thomas, & Curcio, 2009). Compete ao professor adquirir conhecimentos que lhe permitam lecionar, acompanhar uma turma e avaliar. De forma a acompanhar a evolução das tecnologias, do trabalho, da comunicação, dos processos de ensino e de aprendizagem, dos currículos, em suma, do quotidiano, deve ter presente a emergência de novas competências que espelham transformações sociais relevantes.

Para além do acesso, em ambiente escolar, a computadores, projetores e quadros interativos, também a evolução – e consequente redução do custo de aquisição – de tablets, smartphones e computadores portáteis, permitiu que estes dispositivos se tornassem presença habitual no quotidiano das gerações mais novas. Assim, à

complexidade da profissão docente, acresce a necessidade de integração da tecnologia na sala de aula em articulação com o currículo, fazendo emergir as seguintes questões: O que precisa um professor de saber para integrar com sucesso a tecnologia nas suas práticas? Que referenciais teóricos podem contribuir para esta discussão?

É nessa perspetiva que se sugere um dos modelos conceptuais de integração da tecnologia no processo de ensino e de aprendizagem desenvolvido por Mishra e Koehler (2006) – Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) –, com base no trabalho de Shulman (1986). O modelo conceptual de Mishra e Koehler oferece suporte ao desenho de propostas que incluam as TIC (ou qualquer outra forma de tecnologia) integradas no currículo, de forma a estruturar uma abordagem que inclua de forma equilibrada conhecimentos a nível dos conteúdos, a nível pedagógico e também a nível tecnológico, partindo sempre do contexto único do grupo de alunos a quem se destinam as propostas didáticas. De igual modo, sugere-se a importância na integração do TPACK no processo de ensino e de aprendizagem da observação de cinco passos básicos:

selecionar os objetivos de aprendizagem; tomar decisões pedagógicas práticas sobre a natureza da experiência de ensino; selecionar e sequenciar tipos de atividades adequados para concretizar a experiência de ensino; selecionar estratégias de avaliação formativa e sumativa que irão revelar quão bem e como os estudantes estão a aprender; selecionar ferramentas e recursos que irão ajudar melhor os alunos a beneficiar da experiência de aprendizagem planeada (Sampaio & Coutinho, 2015).

Indo ao encontro do que é referido por alguns autores (Machado Júnior, 2005; Barbosa, 2009; Aragão & Oliveira, 2012; Viseu e Menezes, 2014; Campos & Araújo, 2015; Sousa, 2015; Freitas, 2016) acerca do papel da MMCAA na construção do conhecimento discente e docente, particularmente na valorização do professor reflexivo no processo de ensino e aprendizagem, acrescenta-se a mais-valia da integração de *applets* e o uso de tecnologias de *screen recording*. A possibilidade de analisar o que é feito e dito pelos alunos e a influência da ação do professor permite uma adequação e procura de melhorias na planificação de aulas e tarefas, assim como na intervenção ajustada do professor (Anderson, s.d.), indo ao encontro do que referem Ghedin, Oliveira e Almeida (2015) sobre a importância de investigar a própria prática.

2.6.1 Limitações do estudo

O uso dos ratos durante a Fase de Intervenção foi um dos grandes obstáculos. Ao longo das sessões ficou claro que a dimensão dos ratos, demasiado grandes em relação às mãos dos alunos, dificultou a manipulação das *applets* escolhidas. Este detalhe, associado à exatidão de movimentos exigida para manipular as *slide bars* das *applets* com reta numérica, tornou algumas tarefas muito demoradas e, por vezes, frustrantes para os alunos. Revendo o processo de criação da *applet*, é notório o erro de design: a mecânica de manipulação das *slide bars* deveria ter sido implementada com recurso a botões grandes que permitissem incrementar o valor representado por uma unidade a cada clique do rato.

Ao longo da análise dos dados recolhidos sentiu-se por vezes que para aprofundar um pouco mais a mesma relativamente ao que foi feito pelos alunos, particularmente nas tarefas escritas se deveria ter também efetuado algumas entrevistas semiestruturadas.

2.6.2 Recomendações para futuros estudos

Como foi já reiterado diversas vezes, a manipulação do rato foi um constrangimento para os alunos. Substituir a plataforma usada por uma que permita o uso de tecnologia *touch screen* (NCTM, 2014) não só supera este obstáculo, como permite uma maior interação dos alunos com os manipulativos virtuais. A adoção de *smartboards*, *tablets* ou *smartphones* em contexto educativo (Kosheleva, Medina-Rusch, & Ioudina, 2007; Baker, 2008; Hwang, Su, Huang, & Dong, 2009) pode ser uma proposta de ampliação, vantajosa para os alunos, do que foi aqui descrito.

Outra proposta de melhoria prende-se com a projeção do ecrã de forma a ser visível para todos os alunos, permitindo, quer ao professor quer aos alunos, suporte visual para as suas indicações e justificações, agilizando e clarificando o processo.

Relativamente à reta numérica criada para esta turma, pode ser uma mais-valia para a compreensão e uso deste instrumento, principalmente se complementada com o uso de retas numéricas estruturadas, semiestruturadas e vazias em papel e no quadro (Skoumpourdi, 2010).

3. COMPONENTE REFLEXIVA

3.1 1.º Ciclo do Ensino Básico

Ao iniciar este período de estágio, assumi um conjunto de preocupações a ter em conta, tanto nos períodos de observação como de intervenção, nomeadamente: o estágio é um fator importante para o enriquecimento tanto a nível pessoal como profissional, permitindo integrar os fundamentos teóricos aprendidos anteriormente e possibilitando experiências próximas da realidade vivida no contexto escolar; é um processo que necessita de reflexão constante, mas que ajuda a melhorar alguns aspetos menos positivos sem esquecer os sucessos obtidos; é no estágio que se adquire a capacidade de lidar com as diversas situações em sala de aula, e onde se procuram resoluções, como a mudança de postura e a utilização de novas estratégias; é um espaço de aprendizagem que proporciona oportunidades de observar diferentes práticas docente e estratégias no mesmo contexto, além de recolher contributos críticos acerca da sua própria prática (todos eles válidos, quer sejam do supervisor, da professora cooperante ou do par pedagógico). A tudo isto somou-se a habitual ansiedade, agravada por este ser o primeiro momento formal da aquisição da leitura e da escrita pelos alunos.

Ao longo do estágio, fruto da leitura de documentos que considerei poderem oferecer um contributo importante para a minha formação, percebi que muitas das minhas inquietações acerca da formação inicial de professores e sobre o futuro desempenho profissional encontram eco noutros indivíduos. A título de exemplo, destaco a existência de várias dinâmicas da identidade profissional docente – SER, TER, APRENDER e FAZER (Oliveira, 2004) – que permanecem muitas vezes invisibilizadas e são de extrema importância, algo desconhecido para mim PE até à leitura deste estudo. Esta nova perceção contribuiu para que compreendesse a presença do Eu pessoal no Eu profissional (Oliveira, 2004), permitindo uma atuação que procurou conciliar os pontos de convergência e divergência com os demais intervenientes neste estágio.

Regra geral, as diversas semanas de estágio seguiram um percurso comum: 1ª fase: receios e ansiedades; 2ª fase: planos e objetivos; 3ª fase: reflexão. Se as duas primeiras fases são perfeitamente expectáveis, a terceira carece um pouco mais de atenção: será esta minha preocupação com o «eu» fruto do contexto e estrutura do estágio, ou reflexo de um sentimento euforia de quem conseguiu ultrapassar um obstáculo que chegou a

considerar intransponível e para o qual não estava preparado? Uma pesquisa sobre o que diz a investigação em educação revelou-se extremamente valiosa: rapidamente compreendi que estas preocupações e «pequenas vitórias» são habituais, mas mais do que isso compreendi a importância de uma reflexão estruturada sobre a prática, adotando como modelo de reflexão e observação a proposta de Artzt, Armour-Thomas e Curcio (2009).

A observação de aulas lecionadas pela professora cooperante foi marcante para mim, uma vez que permitiram testemunhar a implementação de uma prática com base científica, intencionalidade pedagógica, na qual os alunos desempenhavam um papel ativo e as aprendizagens eram contextualizadas e significativas para os alunos (o início da exploração da adição com a contagem das idas dos alunos ao caixote do lixo para despejarem as afiadeiras, que para os alunos pareceu espontânea e com sentido, do ponto de vista didático foi uma estratégia planeada que aguardava uma ocasião ideal para implementação). Procurei incluir esta forma de atuar nos meus espaços de intervenção, motivo pelo qual optei por este estágio para a componente investigativa acima apresentada. A prática de sala de aula respeitava a voz ativa dos alunos, os objetivos de investigação visavam a superação de dificuldade transversais à maioria da turma.

Ficou para mim evidente a importância de estagiar no 1º ano do 1º CEB: é neste ciclo que aprendem a ler e a escrever, ferramentas essenciais para decifrar o mundo e participar ativamente nas aprendizagens futuras, para além de certas regras comportamentais muito distintas do pré-escolar e comuns à restante escolarização. No fundo, estabelecem-se bases para um crescimento holístico, que permite à criança participar de forma ativa na sociedade.

O professor que acompanha os alunos deste escalão assume um papel determinante no percurso escolar, presente e futuro, dos mesmos. Não basta que o professor procure fortalecer o seu conhecimento científico relativo ao conteúdo curricular e conhecer diversas estratégias pedagógicas, optando pelas que mais favorecerem o grupo de alunos; deve também respeitar a individualidade dos alunos, a heterogeneidade cognitiva e as suas diferenças de maturidade, compreender que têm uma perceção do

mundo completamente díspar dos adultos e uma base de conhecimentos ainda numa fase precoce de edificação.

Penso que seria uma mais-valia se este estágio contemplasse outros períodos de observação para além dos iniciais. Numa fase posterior o conhecimento da turma e das suas rotinas é maior, permitindo uma análise e compreensão mais profunda das dinâmicas de aprendizagem. Também a importância de poder estabelecer um contraste entre a atuação dos estagiários e da orientadora cooperante não deve ser menosprezada, permitindo tirar ilações acerca da turma e do modo como encaram as duas realidades.

3.2 2.º Ciclo do Ensino Básico

3.2.1 Matemática

Desde o início deste ciclo de formação, foi sempre destacado pela supervisão a importância do conhecimento científico nas práticas docentes, valência que cedo constatei e tornei parte da minha atuação. Procurei sempre fundamentar as minhas propostas para cada aula, principalmente em artigos da especialidade, livros didáticos, indicações da supervisora e orientadora cooperante, assim como notas e documentos acumulados ao longo da licenciatura e mestrado. Uma outra ferramenta a que recorri, cujo contributo devo enaltecer, foram as produções do programa Turmas Piloto para o anterior programa de matemática do ensino básico; além de inúmeras sugestões, indicações e indagações pertinentes, continham também um vasto leque de tarefas (tendo adaptado algumas destas para responder ao ano de escolaridade e particularidades da turma em questão, e usado outras como atividades de ampliação de tarefas do manual).

Ao longo das planificações, tentei que houvesse uma sequência: as aulas foram pensadas como fazendo parte de um todo, não blocos isolados. Uma vez que não acontecem no vazio, tentei estabelecer ligações a aulas anteriores (leccionadas pelo par pedagógico ou pela professora cooperante), partindo do conhecimento adquirido em blocos passados e reforçando conexões ou criando indutores para os conteúdos seguintes, valorizando o Horizon Content Knowledge (Ball, Thames, & Phelps, 2008) – fruto do que observei nas práticas da professora cooperante.

Uma das dificuldades com que mais me debati foi a componente de planificação, cujo cumprimento foi algo que não consegui atingir na maior parte das aulas. Ao longo das várias reuniões de estágio, assim como nas minhas reflexões, fui sempre recolhendo contributos com vista a melhorar. Tal como apontado pela professora cooperante, as planificações não eram demasiado extensas, mas a minha gestão das tarefas tornava-as demasiado morosas. Essa é uma das aprendizagens que levo comigo: não basta saber que as tarefas em que os alunos se envolvem ativamente, com componente de investigação e de discussão, são mais ricas; o meu contributo na orientação dessas tarefas está dependente das minhas competências, ainda embrionárias em algumas áreas. Considero esta consciencialização positiva – sei onde preciso de crescer e em que sentido o fazer.

Tenho noção que a orquestração de discussões, ajudar a que formulem conjecturas e que consigam chegar a conclusões, é um processo complexo, mas é importante que o continue a fazer – as rotinas que tenho do 1.º CEB não são as mais adequadas para este contexto, são mais um obstáculo a superar. O nível de exigência na linguagem matemática é difícil de atingir, e é muito fácil cometer lapsos ou incorreções – particularmente quando procuro envolver os alunos nas discussões ou integrar o que dizem na discussão.

Das sugestões de melhoria recebidas, concordo com a sua maioria e vou tentar incluí-las nas minhas práticas (melhorar a gestão e acompanhamento do trabalho da turma, nomeadamente no que concerne ao apoio individualizado; chegar a todos os pontos da sala e criar espaço para ouvirem as intervenções dos pares; aproveitar cada tarefa para explorar o máximo de conteúdos, de forma a tornar a aula mais dinâmica; estabelecer conexões matemáticas); outras acatei, mas sem preocupação de as incluir nas minhas práticas futuras. Quanto a estas últimas, estou a referir-me especificamente à obrigação de os alunos me tratarem por professor – considero que este é um aspeto muito pessoal e no qual tenho direito de escolher o meu caminho. Primeiramente porque não sou professor – mesmo em termos formais, só o mestrado concede a profissionalização e o acesso à carreira docente –, e por último porque não quero ser professor nos moldes que sugerem. Considero que essa barreira intransponível entre aluno e professor é desajustada à postura que pretendo assumir na sala de aula: o respeito conquista-se e

deve ser mútuo, não uma imposição hierárquica. Esta clivagem contradiz o espírito da educação democrática com que me identifico.

Comparando a primeira e a última aula em que intervim neste estágio, considero que evolui em alguns aspetos importantes: procuro conhecer as habituais dificuldades dos alunos associadas ao conteúdo curricular a explorar, sinalizadas na literatura científica, de modo a antecipar estratégias de superação e desbloqueio; escolho menos tarefas para cada aula, mas procuro que sejam ricas, permitindo explorar vários conceitos matemáticos e estabelecer relações e conexões com conteúdos já trabalhados ou servirem como ponte para os conteúdos seguintes; procuro escolher a melhor tipologia de tarefa (Ponte, 2005) consoante o objetivo pretendido (aprendizagem de um novo conceito, estabelecer conexões matemáticas, sistematizar aprendizagens, etc.); procuro escolher os melhores recursos para cada tarefa – sejam eles um PowerPoint, uma fita métrica, papel e tesoura, uma *applet* em Geogebra ou uma panela –, dependendo do objetivo proposto, podendo até funcionar como instigadores de motivação para os alunos; compreendo melhor a importância de fazer sínteses intermédias, preparadas com cuidado de forma a que a linguagem matemática facilite as aprendizagens dos alunos; aprendi a valorizar as diferentes ideias e estratégias dos alunos, aproveitando falhas ou erros para proporcionar momentos de aprendizagem.

3.2.2 Ciências Naturais

Ao contrário de estágios anteriores, abordei este com alguns receios e ansiedades. Em diferentes momentos fui alertado para a necessidade de assumir uma postura diferente do 1.º CEB e do meu ambiente profissional (Atividades de Enriquecimento Curricular), o que me deixou algo desequilibrado e sem saber como me mover neste novo contexto. A tentativa de assumir algo que não sou foi desastrosa: ao relembrar essa primeira aula ainda me sinto incomodado com a minha atuação autoritária. Decidi, pois, manter a minha identidade, o que caracteriza a minha maneira de estar na sala de aula: a dimensão afetiva e a genuína preocupação com os alunos, deixar que sejam os alunos a escolher se me tratem pelo nome ou por «professor», num equilíbrio com o clima e rotinas habituais da turma.

Procurei sempre suporte científico para as minhas práticas, tanto a nível didático como de conteúdo, tentando diversificar as fontes de consulta para poder conhecer diferentes caminhos e encontrar o meu, assim como ouvir as sugestões da supervisora e da professora cooperante. Foi com base nas primeiras semanas de observação que estabeleci algumas das minhas diretrizes para o estágio, para as quais as notas de campo recolhidas se revelaram um instrumento valioso. Da observação foi possível reconhecer alguns dos hábitos e características da turma, assim como da atuação da professora cooperante, que procurei incluir nas minhas práticas. Mantive sempre este hábito, incluindo nas aulas do par pedagógico – de acordo com o modelo proposto por Artzt, Armour-Thomas e Curcio (2009) –, o que permitiu fortalecer o meu conhecimento do grupo e do contexto, ponto de partida para todas as planificações e intervenções.

A sequência planificação/preparação/reflexão foi um obstáculo inicial com que me debati. Confesso que a primeira planificação foi um enorme desafio, não sabia sequer por onde começar. Com o acumular de experiências, os conselhos da supervisora, da professora cooperante e a observação mais cuidada das aulas a que assisti, encontrei o início do meu percurso como docente de Ciências Naturais, libertando-me mais do manual, estratégia que nunca me agradou. Hoje sou mais capaz de recorrer a estratégias em que os alunos são mais ativos; quero ainda dar o passo que lhes permita ter espaço como decisores na sala de aula – algo que já consegui, em parte, no 1.º CEB. A preparação das aulas, além de servir o fito de as interiorizar, permitiu também antever algumas situações, que caso surgissem, estavam previstas opções para as abordar. A reflexão pessoal pós-aula, em conjunto com as reuniões de estágio, tiveram sempre implicações na aula seguinte – traduzindo-se em alterações à planificação, ajuste às estratégias ou aos recursos.

Este foi um estágio particularmente gratificante: sentia-me bastante inseguro acerca da minha prestação a início, contudo com a colaboração da supervisora e da professora cooperante, fui melhorando a minha atuação e forma de estar com a turma. Procurei manter sempre os alunos motivados e envolvidos nas aprendizagens, recorrendo para tal a diversas estratégias: tentei que as aulas fossem dinâmicas, alternando entre momentos com tarefas de escrita, leitura, recursos multimédia, manipulação de

modelos anatómicos, procedimentos experimentais, discussão, entre outros; escolhi tarefas que permitissem explorar vários conceitos e estabelecer relações e conexões com conteúdos já trabalhados ou servirem como ponte para os conteúdos seguintes, com o intuito de proporcionar ao alunos uma visão integrada dos conteúdos curriculares, particularmente da interação dos diferentes sistemas do corpo humano, partindo daquilo que os alunos já sabem – sempre com atenção ao surgimento de conceções alternativas e à necessidade de as desmistificar; compreendo melhor a importância de fazer sínteses intermédias, preparadas com cuidado antecipadamente, de forma a permitir que sejam os alunos a construir corretamente (com contributos orais ou escritos) os esquemas, diagramas ou tabelas, com o objetivo de sistematizar aprendizagens; procuro favorecer uma perspetiva CTS dos conteúdos curriculares, com particular.

O 2.º CEB é um contexto completamente díspar dos que experienciei anteriormente. A diferença nas horas de contacto e relacionamento com os alunos define muito do que é a ação docente neste ciclo. Ficou também claro que a esta experiência ficou a faltar a componente não letiva do 2.º CEB, ainda muito opaca. Também a ausência de um espaço de partilha e reflexão informal entre pares foi sentida, particularmente com o par pedagógico – hábito que cultivei desde o primeiro estágio em Educação Pré-Escolar.

3.3 Considerações finais

Ao redigir as últimas linhas desta etapa de formação, não posso esquecer a influência da relação entre a escola e a instituição de ensino superior, cuja principal preocupação passa por garantir que a formação académica seja coerente com a experiência formativa proporcionada pela escola de acolhimento na construção do conhecimento profissional docente. Uma vertente de extrema importância desta relação passa pela consciencialização do PE da dicotomia entre a prática pedagógica e conhecimento científico. Desta forma evita-se cair no extremismo de considerar que a prática não reflete a formação académica ou de tomar a prática como a verdadeira formação para a docência, de cariz utilitarista. Deve assumir-se a postura do professor reflexivo,

articulando os saberes da prática e da teoria, numa busca de crescimento pessoal e profissional, reconhecendo a importância dos contributos de todos os atores nos processos de ensino e de aprendizagem.

Nos períodos de estágio, o professor cooperante tem um papel fundamental na articulação entre o conhecimento académico (especialidade e ciências da educação) e o conhecimento profissional. A ação do professor cooperante, pelo facto de estar inserido profissionalmente numa sala dentro da escola, situa-se ao nível da formação em contexto, competindo a este ajudar a diagnosticar os obstáculos que os professores estagiários encontram para chegar a uma solução contextualizada. O PE deve ter também a humildade de reconhecer o seu posto de aprendiz, sem abdicar de decidir sobre a sua formação, reconhecendo ao supervisor e orientador cooperante o papel de suporte a um potencial profissional em permanente construção. É imperativo um forte domínio dos conteúdos científicos, caso contrário o contacto inicial com a dimensão curricular e contexto escolar, e as dificuldades que daí possam surgir, podem tornar-se avassaladoras.

Kagan (citado por Abrantes 2005) identifica três fases do conhecimento do professor:

- 1) conhecimento memorizado - nesta fase o formando é capaz de falar sobre uma estratégia de ensino, mas ou não a consegue realizar ou realiza-a de modo incompleto;
- 2) Conhecimento de rotina - o formando é capaz de falar sobre a estratégia e sobre os princípios que lhe estão subjacentes, mas aplica-a com muito esforço;
- 3) Conhecimento profundo - o formando conversa criticamente sobre a estratégia utilizada, mobiliza-a em vários contextos e o modo como os alunos aprendem passa a ser uma preocupação central. Ao apostar no conhecimento do modo de aprender dos alunos e na capacidade de adequar a este os materiais didáticos, a sua exploração e estratégias de comunicação, reconhece-se aos alunos um papel relevante no processo de ensino e de aprendizagem. O PE deve procurar propor tarefas que favoreçam as aprendizagens visadas, respeitando as individualidades dos alunos e o seu crescimento holístico, assim como garantir e respeitar que têm uma voz ativa na construção do seu conhecimento. Deve promover uma pedagogia diferenciada, propondo situações que simultaneamente constituam desafios ao alcance dos alunos e levem cada um a

progredir nas suas aprendizagens e crescimento pessoal, assumindo mais o papel de orientação, ao invés da prescrição.

Estar disposto a aceitar e procurar colmatar as minhas lacunas – as que identifiquei e me foram apontadas – enquanto professor em formação, foi um dos aspetos importantes para o meu desempenho neste mestrado. A minha inexperiência em orquestrar discussões (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008; Guerreiro, Tomás Ferreira, Menezes, & Martinho, 2015) condicionou a qualidade de alguns momentos de discussão em algumas aulas. Ao aperceber-me desta lacuna, procurei aprofundar o meu conhecimento acerca de orquestração de discussões, passando a adotar uma postura de antecipar dificuldades e bloqueios, preparando estratégias que auxiliassem os alunos a superá-los, nomeadamente com perguntas previamente preparadas, esquemas, desenhos e metáforas. Debatí-me constantemente com a gestão do tempo das tarefas propostas, as sugestões didáticas das professoras cooperantes e dos supervisores (escolher tarefas que permitam explorar vários conceitos, aproveitar melhor os esclarecimentos individuais aos alunos de forma a incluir toda a turma, estruturar os momentos de síntese intermédia, antecipar dificuldades dos alunos e preparar estratégias para as superar, utilizar os trabalhos de casa como ferramenta de sistematização das aprendizagens e indutores de novos conteúdos, entre outras) permitiram-me melhorar esta faceta, que necessito de continuar a trabalhar.

Os períodos alargados de estágio, durante estes dois anos do mestrado, permitiram-me compreender melhor a relação entre o conhecimento do professor dos conteúdos curriculares, o modo como os estudantes constroem as suas aprendizagens, diferentes estratégias pedagógicas e formas de avaliação (Shulman, 1986; 1987). Ao optar por guiar-me pelo modelo conceptual de integração da tecnologia no processo de ensino e de aprendizagem desenvolvido TPACK (Mishra & Koehler, 2006) nas minhas práticas, consegui desenhar e orientar tarefas que partiam sempre do contexto das turmas, procuravam usar estratégias pedagógicas adequadas aos conteúdos curriculares e objetivos pretendidos e escolher a tecnologia apropriada à estratégia escolhida de forma a proporcionar oportunidades de aprendizagem pelos alunos (fosse no uso de um laboratório virtual para investigar o processo de respiração dos peixes; usar modelos anatómicos para compreender as etapas do desenvolvimento

intrauterino; tirar partido de um modelo dos pulmões construído com uma garrafa de plástico, balões e palhinhas para observarem o seu funcionamento; recorrer ao software GeoGebra para compreender o traçado de alturas de triângulos; usar um pedaço de fio e objetos circulares para compreender a relação entre o perímetro de um círculo e o significado de π ou explorar *applets* com o objetivo de melhorar a compreensão dos sentidos da adição e da subtração pelos alunos).

A título pessoal, considero ter continuado o meu crescimento profissional e alcançado uma melhor compreensão da construção da identidade profissional docente e dos elementos que a constituem – destacando o papel da biografia, “bem como da presença do Eu pessoal no Eu profissional” (Oliveira H. , 2004, p. 528). O contributo da formação ministrada pela ESEC, particularmente das unidades curriculares que encaram o mestrando como futuro professor e não como aluno, assim como de outros momentos formativos, foram determinantes para o desenrolar deste percurso. Nestes últimos, destaco duas palestras a que tive oportunidade de assistir (uma do professor José Pacheco no I Encontro Educação - Desafios de hoje para o futuro 2015 e outra da professora Isabel Martins no II Encontro em Investigação e Práticas em Educação 2017) e a participação e apresentação de uma comunicação no EIEM 2016, que me alargaram horizontes, me tornaram ainda mais exigente comigo próprio, consciente da necessidade da formação contínua de professores e da importância de investigar a prática docente, fazendo-me questionar muito do que sou e pretendo ser enquanto professor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, M. (2005). *O desenvolvimento da reflexividade no contexto do discurso supervisoivo*. Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro. Aveiro.
- Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação*. Porto: Edições ASA.
- Aharoni, R. (2008). *Aritmética para pais*. Lisboa: Gradiva.
- Akihiko, T. (2002). *Affordances of computer-based and physical geoboards in problem-solving activities in the middle grades*. Tese de doutoramento. University of Illinois, Urbana-Champaign. Obtido de <https://www.learntechlib.org/p/126952>
- Andersson, C. (s.d). *Formative Assessment - and the Component of Adjusted Teacher Instruction*. Obtido de Oxford Abstracts: Keynote PCO: https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0305.pdf
- Aragão, L., & Oliveira, A. M. P. d. (2012). As discussões entre formador e professores no planeamento do ambiente de modelagem matemática. *Bolema*, 26(43), 1071-1101.
- Arrais, M., Martins, A., & Grossi, M. (2012). *Interface Natural do Usuário: Aplicações para a Inovação do Ensino a Distância com o Uso do Microsoft Kinect*. Anais do 18º Congresso Internacional de Educação a Distância, São Luis, MA.
- Arter, J., & McTighe, J. (2001). *Scoring rubrics in the classroom: Using performance criteria for assessing and improving student performance*. Thousand Oaks, California: Corwin Press.
- Artzt, A. F., Armour-Thomas, E., & Curcio, F. R. (2009). *Becoming a reflective mathematics teacher: A guide for observations and self-assessment*. Nova Iorque: Routledge.
- Baker, M. (2008). Merging Technology & Mathematics Instruction: The Case of Virtual Manipulatives & Geometric Concepts. In G. Richards (Ed.), *Proceedings of E-Learn 2008--World Conference on E-Learning Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education*. 566-573. Chesapeake, VA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE)
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barbosa, J. C. (2001). Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema*, 14(15), 5-23.

- Barbosa, J. (2003). Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica. In *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. 2, 1-13. São Paulo: SBEM.
- Barbosa, J. (2003a). Modelagem matemática na sala de aula. *Perspectiva*, 27(98), 65-74.
- Barbosa, J. C. (2009). Integrando Modelagem Matemática nas práticas pedagógicas. *Educação Matemática em Revista*, 14(26), 17-25.
- Barroncas de Oliveira, C., & Menezes Gonzaga, A. (2012). Professor pesquisador-educação científica: o estágio com pesquisa na formação de professores para os anos iniciais. *Ciência & Educação (Bauru)*, 18(3), 689-702.
- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto.
- Berg, B. L. (2004). *Qualitative Research Methods for the Social Sciences*. Boston: Pearson Education.
- Biembengut, M. S. (2009). 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 7-32.
- Biembengut, M. S. (2014). Modelagem matemática & resolução de problemas, projetos e etnomatemática: pontos confluentes. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 7(2), 197-219.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012). *Caderno de Apoio 1.º Ciclo*.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. (2013b). *Metas curriculares ensino básico matemática*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M. C., Damião, H., & Festas, I. (2013). *Programa de Matemática Para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério de Educação e Ciência.
- Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W., & Leiss, D. (2005). "Filling Up" - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In Bosch, M. (Ed.), *European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. 1623-1633. Sant Feliu de Guíxols, Spain:

FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull and ERME.

- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68.
- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação: DGIDC.
- Boekaerts, M., & Corno, L. (2005). Self-Regulation in Classroom: A Perspective on Assessment and Intervention. *Applied Psychology: An International Review*, 54(2), 199-231.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.
- Bonotto, C. (2011). Engaging students in mathematical modelling and problem posing activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(3), 18-32.
- Braga, A. F. R. (2013). *O uso integrado de recursos manipulativos digitais e não-digitais para o ensino-aprendizado de geometria*. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Burns, B. A., & Hamm, E. H. (2011). A comparison of concrete and virtual manipulative use in third- and fourth-grade mathematics. *School Science and Mathematics*, 111(6), 256-261.
- Campos, I. d. S., & Araújo, J. d. L. (2015). Envolvimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática: relação com o saber e possibilidades de ação. *Bolema*, 29(51), 167-182.
- Cardoso, V. C. (2005). *Materiais didáticos para as quatro operações* (6.ª ed.). São Paulo-SP: Instituto de Matemática e Estatística da USP.
- Carmo, H., & Ferreira, M. M. (1998). *Metodologia da Investigação: Guia para Auto-Aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Carpenter, T. P., & Moser. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. Em Lesh, R. A., & Landau, M. (Ed.) *The acquisition of mathematics concepts and processes*. 7-44. New York: Academic Press.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics*

Education, 15(3), 179-202.

- Carreira, S. (2009). Matemática e tecnologias–Ao encontro dos “nativos digitais” com os “manipulativos virtuais”. *Quadrante*, 8(1), 53-85.
- Carvalho e Silva, M. E. d., & Sant`Ana, D. C. (2002). A modelagem como ferramenta no ensino de matemática. *Ciência e cultura*, 35(34), 31-52.
- Caseiro, A. & Ribeiro, C. M. (2012). Conhecimento de futuros professores dos Primeiros Anos: uma experiência com racionais. In Cadima, R., Pereira, I., Menino, H., Dias, I. S., & Pinto, H. (Ed.), *Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação*. 393-400. Leiria: Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Instituto Politécnico de Leiria
- Castelhano, S. P. d. S. (2016). *Refletindo sobre a Prática Pedagógica em Educação Pré-Escolar e 1.º CEB: a resolução de problemas de adição e subtração numa turma de 1.º ano*. Tese de Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Escola Superior de Educação e Ciências Sociais – Instituto Politécnico de Leiria, Leiria. Obtido de <http://hdl.handle.net/10400.8/2053>
- Castro, A., Santana, F., Neto, T., & Órfão, I. (2013). Iniciação à investigação em educação matemática: exemplo de duas tarefas com recurso ao Geogebra. *Indagatio Didactica*, 5(1), 127-148.
- Chappuis, J. (2007). *Creating and Recognizing Quality Rubrics*. New Jersey: Pearson Education.
- Chaves, M. I. d. A., Espírito Santo, A. O., & Souza, E. G. (2015). *O desenvolvimento de saberes docentes em modelagem matemática*. Belém - Pará: SBEM-PA.
- Clements, D. H. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 1(1), 45-60.
- Clements, D. H., & McMillen, S. (1996). Rethinking Concrete Manipulatives. *Teaching Children Mathematics*, 2(5), 270-279.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6.^a ed). Londres: Routledge.
- Confrey, J., & Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. In Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Ed.) *Modelling and Applications in Mathematics Education*. 57-68. Boston, MA: Springer.
- Coutinho, C. P., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M. J., & Vieira, S. (2009).

- Investigação-acção: metodologia preferencial nas práticas educativas. *Revista Psicologia, Educação e Cultura*, 13(2), 355-379.
- D'Ambrosio, U. (2009). Mathematical modeling: Cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 89-98.
- de Almeida, L. M. W., de Loiola Araújo, J., & Bisognin, E. (2011). *Práticas de modelagem matemática na educação matemática*. Londrina: EDUEL.
- de Miranda, D. F., & Laudares, J. B. (2009). Informatização no Ensino da Matemática: investindo no ambiente de aprendizagem. *Zetetiké: Revista de Educação Matemática*, 15(2), 71-88.
- Dias, P., & Santos, L. (2010). Práticas avaliativas e auto-regulação da aprendizagem matemática pelos alunos. In Nogueira, F., Oliveira, A. L., Baptista, A. V., & Casanova, D. (Org) *I Encontro Nacional de Jovens Investigadores em Educação*. Mensagem de Boas Vindas. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Dick, T. P., & Hollebrands, K. F. (2011). *Focus in High School Mathematics: Technology to Support Reasoning and Sense Making*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dorward, J., Hill, K. (2004). *The Effect Of Virtual Manipulatives On Elementary Students Comprehension of Fractions*. An Undergraduate Student Research project. Utah State University. Logan, Utah.
- Drickey, N. A. (2000). *A comparison of virtual and physical manipulatives in teaching visualization and spatial reasoning to middle school mathematics students*. Tese de doutoramento. Utah State University Obtido de <https://www.learntechlib.org/p/125430/>.
- Durmus, S., & Karakirik, E. (2006). Virtual manipulatives in mathematics education: A theoretical framework. *The Turkish Online Journal of Education Technology*, 5(1), 117-123.
- Estrela, A. (1994). *Teoria e Prática de Observação de Classes: Uma estratégia de Formação de Professores*. Porto: Porto Editora.
- Fernandes, R. J. G., & dos Santos Junior, G. (2012). Modelagem matemática: um recurso pedagógico para o ensino de matemática. *Revista Práxis*, 4(8), 21-29.
- Ferreira, E. (2012). *O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade*. Tese de Doutoramento. Instituto de Educação - Universidade de Lisboa. Obtido de

<http://hdl.handle.net/10451/5996>

- Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86–95.
- Ferri, R. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*. 110(5), 19-25.
- Ferri, R., & Blum, W. (2013). Barriers and Motivations of Primary Teachers for Implementing Modelling in Mathematics Lesson. In Ubuz, B., Haser, C., & Mariotti, M. A. (Ed.) *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. 8, 6-10. Ankara, Turkey: Middle East Technical University and ERME
- Fino, C. N. (1999). Um software educativo que suporte uma construção de conhecimento em interacção (com pares e professor). In *Actas do 3º Simpósio de Investigação e Desenvolvimento de Software Educativo* (edição em cd-rom).
- Fino, C. N. (2011). *Investigação e inovação (em educação)*. In Fino, C. N. & Sousa, J. M. (Org.). *Pesquisar para mudar (a educação)*. 29-48. Funchal: Universidade da Madeira - CIE-UMa.
- Fiorentini, D. (2012). Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 7(10), 63-78.
- Fiorentini, D., & Crecci, V. (2013). Desenvolvimento profissional docente: um termo guarda-chuva ou um novo sentido à formação? *Formação Docente–Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação de Professores*, 8(5), 11-23.
- Freitas, J. F. R. B. (2016). *Modelagem matemática no ambiente virtual de aprendizagem (AVA): entendendo as suas dimensões crítica e reflexiva a partir de um estudo de caso*. Tese de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto. Obtido de <http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/8494>
- Freitas, R. C. O., & Paiva, M. A. V. (2006). *MultiBase - Um Novo Ambiente Virtual para Apoiar a Aprendizagem da Matemática*. In Gitirana, V., Bellemain, F., & Bellemain, P. B. (Ed.) *I SIPEMAT, Pesquisa em Educação Matemática: Um olhar ampliado sobre a sala de aula*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco – Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação. Obtido de

http://www.lematec.net.br/CDS/SIPEMAT06/index.html?info_type=ccientifica&lang_user=br

- Frison, L. M. B. (2016). Autorregulação da aprendizagem: abordagens e desafios para as práticas de ensino em contextos educativos. *Revista de Educação PUC-Campinas*, 21(1), 1-17.
- Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 243-275). New York, NY: Macmillan.
- Fuson, K. (2003). Developing mathematical power in whole number operations. In Hiebert, J., Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 68- 94). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 143-162.
- Gatti, B. A. (2017). Formação do professor pesquisador para o ensino superior: desafios. *Psicologia da Educação*, 16, 73-82.
- Ghedin, E., Oliveira, E. S. D., & Almeida, W. A. D. (2015). *Estágio com pesquisa*. São Paulo: Cortez Editora.
- Gningue, S. M., Menil, V. C., & Fuchs, E. (2014). Applying Bruner's Theory of Representation to Teach Pre-Algebra and Algebra Concepts to Community College Students Using Virtual Manipulatives. *Electronic Journal of Mathematics & Technology*, 8(3), 159-177.
- Gonçalves, A., Sanches, A., & Martins, C. (2013). *Iniciação à prática profissional na atual formação para a docência: O que pensam os alunos?* In Estrela, M. T., Cavaco, C., Pinto, P. R., Cardona, M. J., Cabrito, B., Costa, F. A. ... Figueiredo, P. (Org.) *Formação Profissional: Investigação Educacional sobre teorias, políticas e práticas. Atas do XX Colóquio da Secção Portuguesa da AFIRSE*. 1, 1305-1315 Lisboa: Instituto de Educação – Universidade de Lisboa.
- Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1981). *Effective evaluation*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: A perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, 23(4), 279-295.

- Hammersley, M., & Atkinson, P. (1983). *Ethnography: Principles in Practice*. London: Routledge.
- Hoffmann, D. S., Martins, E. F., Serres, F. F., & Basso, M. V. D. A. (2010). Design pedagógico de uso integrado de recursos manipulativos digitais e não-digitais de Números e Operações. In Souza, A. S., Brito, A., & Duarte, A. (Org.) *Atas do XXI Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE. 1*. João Pessoa, PB: Universidade Federal da Paraíba.
- Hwang, W. Y., Su, J.-H., Huang, Y. M., & Dong, J.-J. (2009). A Study of Multi-Representation of Geometry Problem Solving with Virtual Manipulatives and Whiteboard System. *Journal of Educational Technology & Society*, 12(3), 229-247.
- IAVE. (2016). *Instituto de Avaliação Educativa, I.P. (IAVE)*. Obtido de <http://iave.pt/np4/home>
- Izydorczak, A. E. (2003). *A Study of Virtual Manipulatives for Elementary Mathematics*. Tese de doutoramento. State University of New York Buffalo. Obtido de <https://www.learntechlib.org/p/122892/>
- Jesus, P. M. (2011). *Contributos da Prática de Ensino Supervisionada na Formação Inicial de Professores do 1.º Ciclo - Conceções de professores supervisores e professores cooperantes*. Lisboa: Instituto de Educação da universidade de Lisboa.
- Johnson, P. E., Campet, M., Gaber, K., & Zuidema, E. (2012). Virtual manipulatives to assess understanding. *Teaching Children Mathematics*, 19(3), 202-206.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. E. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Kim, S. Y. (1993). *The relative effectiveness of hands-on and computer-simulated manipulatives in teaching seriation, classification, geometric, and arithmetic concepts to kindergarten children*. Tese de Doutoramento. University of Oregon Eugene.
- Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60-70.
- Kosheleva, O., Medina-Rusch, A., & Ioudina, V. (2007). Pre-service teacher training in mathematics using tablet PC technology. *Informatics in education*, 6(2), 321-334.

- Kravčik, M., & Klamka, R. (2014). Self-Regulated Learning Nudges. In *Proceedings of the First International Workshop on Decision Making and Recommender Systems*. 52-54. Florence, Italy: IEEE Press.
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lin, C.-P., Shao, Y.-J., Wong, L.-H., Li, Y.-J., & Niramitranon, J. (2011). The impact of using synchronous collaborative virtual tangram in children's geometric. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 10(2), 250-258.
- Loureiro, C. (1997). Multiplicação, combinatória e desafios. *Educação e Matemática*, 44, 14-16.
- Lüdke, M., & da Cruz, G. B. (2013). Aproximando universidade e escola de educação básica pela pesquisa. *Cadernos de pesquisa*, 125(35), 81-109.
- Ma, L. (2009). *Saber e ensinar matemática elementar*. Lisboa: Gradiva.
- Machado Júnior, A. G. (2005). *Modelagem matemática no ensino-aprendizagem: ação e resultados*. Tese de Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas - PPGECEM/IEMC I. Universidade Federal do Pará. Obtido de <http://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/1780>
- Marôco, J., Gonçalves, C., Lourenço, V., & Mendes, R. (2016). *Pisa 2015 - Portugal*. Lisboa: IAVE.
- Martins, F., Vieira, M., Reis, D., & Ribeiro, C. M. (2013). Ensinar através da modelação matemática: uma primeira discussão baseada numa experiência de ensino no 4.º ano de escolaridade. *EXEDRA Revista Científica ESEC*, 8, 166-180.
- Martins, J. A. (2011). *O sentido das operações nos alunos do ensino básico*. Tese de Mestrado em Didática e Inovação no Ensino das Ciências. Universidade do Algarve. Obtido de <http://hdl.handle.net/10400.1/3087>
- Martins, M. I. A. S. (2016). *A matemática na educação pré-escolar. as operações adição e subtração nos seus diversos sentidos*. Tese de Mestrado em Educação Pré-Escolar. Escola Superior de Educação e Ciências Sociais - Instituto Politécnico de Portalegre. Obtido de <http://hdl.handle.net/10400.26/17312>
- Mata, L. (2007). *A descoberta de Escrita - textos de apoio para educadores de*

- infância*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.
- McLeod, J., VaSinda, S., & Dondlinger, M. J. (2012). Conceptual visibility and virtual dynamics in technology-scaffolded learning environments for conceptual knowledge of mathematics. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 31(3), 283-310.
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: MEC.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 2000)
- NCTM (2011). *Technology in Teaching and Learning Mathematics*. NCTM Position Statement.
- NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston: NCTM.
- Matos, J. F. (1995). *Modelação Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Maximo-Esteves, L. (2008). *Visão Panorâmica da Investigação-Acção*. Porto: Porto Editora.
- Mesquita-Pires, C. (2010). A Investigação-acção como suporte ao desenvolvimento profissional docente. *EER: revista de educação*, 2(2), 66-83.
- Meyer, J. F. C. A., Caldeira, A. D., & Malheiros, A. D. S. (2011). *Modelagem em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record*, 108(6), 1017-1054.
- Morais, C. M. S. (2011). *O cálculo mental na resolução de problemas: um estudo no 1.º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Escola Superior de Educação - Instituto Politécnico de Lisboa. Obtido de <http://hdl.handle.net/10400.21/1211>
- Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching children mathematics*, 8(6), 372-377.
- Moyer-Packenham, P. S., & Bolyard, J. J. (2016). Revisiting the definition of a virtual manipulative. Em *International perspectives on teaching and learning*

mathematics with virtual manipulatives (pp. 5-16). New York: Springer.

Moyer-Packenham, P. S., Salkind, G., & Bolyard, J. J. (2008). Virtual manipulatives used by K-8 teachers for mathematics instruction: Considering mathematical, cognitive, and pedagogical fidelity. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education [Online serial]*, 8(3).

Moyer-Packenham, P. S., Ulmer, L. A., & Anderson, K. L. (2012). Examining pictorial models and virtual manipulatives for third-grade fraction instruction. *Journal of Interactive Online Learning*, 11(3), 103-120.

Noffke, S., & Somekh, B. (2010). *Handbook of Educational Action Research*. London: Sage.

Oliveira, H. (2004). *A construção da identidade profissional de professores de Matemática em início de carreira*. Tese de doutoramento em Educação (Didáctica da Matemática). Universidade de Lisboa – Faculdade de Ciências. Obtido de <http://hdl.handle.net/10451/6991>

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2012). Recursos didáticos numa aula de ensino exploratório: Da prática à representação de uma prática. *Investigação em Educação Matemática*, 557-570.

Oliveira, M. S. (2010). Modelagem Matemática: Uma Concepção Baseada na Noção de Ambientes de Aprendizagem. In Pereira, A. M. O., Cazorla, I. M., & Gitirana, V. (Ed.), *X Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática, cultura e diversidade*. Ilhéus, BA: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Ozmantar, M. F. (2005). *An investigation of the formation of mathematical abstractions through scaffolding*. Tese de Doutorado. University of Leeds, Leeds. Obtido de <http://etheses.whiterose.ac.uk/id/eprint/11271>

Pais, A. J. N. (2011). *Perspetivas sobre a modelação matemática no ensino: as experiências de Portugal e do Brasil*. Tese de Mestrado em Didática e Inovação no Ensino das Ciências. Faculdade de Ciências e Tecnologias - Universidade do Algarve. Obtido de <http://hdl.handle.net/10400.1/3005>

Parker, T. H., & Baldrige, S. (2004). *Elementary mathematics for teachers*. Okemos, Michigan: Sefton-Ash.

Pead, D., Ralph, B., & Muller, E. (2007). Uses of technologies in learning mathematics through modelling. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 309-318). Springer, Boston, MA.

Perrenoud, P. (2000). *Dez Novas Competências para Ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

Pinto, L. S. M. (2014). *Desenvolvimento dos sentidos da operação subtração no 1º CEB*. Tese de Mestrado em Ensino do 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico. Universidade de Aveiro. Obtido de <http://hdl.handle.net/10773/14372>

Pólya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Pólya, G. (2014). O ensino por meio de problemas. *Educação e Matemática*, 44-50.

Ponte, J. P. (1992). Problemas de Matemática e Situações da Vida Real. *Revista de Educação*, 2(2), 95-108.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. d. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2008). A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas. In Luengo-González, R., Gómez-Alfonso, B., Camacho-Machín, M. & Nieto, L. B. (Eds.). *Investigación en educación matemática XII*. 55-78. Badajoz: SEIEM

Ponte, J. P., Serrazina, M. L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

Pratas, R., Martins, F., & Rato, V. (2016). Modelação matemática como prática de sala de aula: o uso de manipulativos virtuais no desenvolvimento dos sentidos da adição. In Canavarro, A., Borralho, A., Brocardo, J., Santos, L. (Eds.), *Atas do EDEM 2016, Encontro em Investigação em Educação Matemática*. 1, 35 - 48. Évora: SPIEM.

Prensky, M. (2001). Digital natives, digital immigrants part 1. *On the horizon*, 9(5), 1-6.

Quaresma, M., Ponte, J. P., Baptista, M., & Mata-Pereira, J. (2014). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional. Em *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 409-425). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (1998). *Manual de investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.

- Ramos, L. F. (2009). *Conversas sobre números, ações e operações: uma proposta criativa para o ensino da Matemática nos primeiros anos*. São Paulo: Ática.
- Ramos, S. G. M. (2005). A pesquisa educacional inserida na formação inicial e continuada de professores: superando o distanciamento entre a universidade e a escola. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas*, 6(1), 65-68.
- Reimer, K., & Moyer, P. S. (2005). Third graders learn about fractions using virtual manipulatives: A classroom study. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24(1), 5-25.
- Reis, C. A. (2014). *Refletindo sobre a Prática Pedagógica em Educação de Infância e 1.º CEB: o sentido das operações de adição e subtração na resolução de problemas e a comunicação matemática numa turma do 1.º ano*. Tese de Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Escola Superior de Educação e Ciências Sociais - Instituto Politécnico de Leiria. Obtido de <http://hdl.handle.net/10400.8/1562>
- Renz Junior, H. (2015). *A importância da modelagem matemática no ensino-aprendizagem*. Tese de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Goiás. Obtido de <http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/4706>
- Ribeiro, C. M. (2010). O Impacto da Modelação no Processo de Ensino Aprendizagem: uma simbiose entre a resolução de problemas e a modelação do quotidiano. *Bolema*, 23(37), 977-1004.
- Rosa, M., & Orey, D. C. (2012). A modelagem como um ambiente de aprendizagem para a conversão do conhecimento matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(42 A), 261-290.
- Rosário, P., Lourenço, A. A., Paiva, M. O., Núñez, J. C., González-Pienda, J., & Valle, A. (2010). Inventário de processos de auto-regulação da aprendizagem (IPAA). In C. Machado, M. M. Gonçalves, L. S. Almeida & M. R. Simões (Coords.), *Instrumentos e Contextos da Avaliação Psicológica*, Volume I (pp. 159-174). Coimbra: Almedina.
- Roschelle, J., Shechtman, N., Tatar, D., Hegedus, S., Hopkins, B., Empson, S., Knudsen, J. Gallagher, L. P. (2010). Integration of Technology, Curriculum, and Professional Development for Advancing Middle School Mathematics: Three Large-Scale Studies. *American Educational Research Journal*, 47(4), 833-878.
- Rosen, D., & Hoffman, J. (2009). Integrating concrete and virtual manipulatives in

- early childhood mathematics. *Young Children*, 64(3), 26-32.
- Sampaio, P., & Coutinho, C. P. (2015). O professor como construtor do currículo: integração da tecnologia em atividades de aprendizagem de matemática. *Revista Brasileira de Educação*, 26(62), 635-661.
- Sanches, I. (2005). Compreender, agir, mudar, incluir. Da investigação-acção à educação inclusiva. *Revista Lusófona de Educação*, 5, 127-142.
- Santos, E., & Santos, L. (2017). *Práticas Avaliativas Reguladoras Para a Aprendizagem e a Regulação do Ensino da Matemática*. Obtido em https://www.researchgate.net/publication/318455833_PRATICAS_AVALIATIVAS_REGULADORAS_PARA_A_APRENDIZAGEM_E_A_REGULACAO_DO_ENSINO_DA_MATEMATICA
- Santos, L. (2003). Avaliar competências: uma tarefa impossível? *Educação e Matemática*, 74, 16-21.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). Concrete' Computer Manipulatives in Mathematics Education. *Child Development Perspectives*, 3(3), 145–150.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2016). Physical and Virtual Manipulatives: What Is “Concrete”? In *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (pp. 71-93). Logan, UT: Springer International Publishing.
- Shih, W. C. (2015). Enhancing Virtual Manipulatives for After-School Tutoring in the Subtraction Unit. In *Industrial Engineering, Management Science and Applications 2015* (pp. 439-449). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundation of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Silva, C. P. F. (2010). *Os números e operações: Investigações Matemáticas com alunos do 2.º ano do 1.º ciclo do ensino básico*. Tese de mestrado em Ciências da Educação. Instituto de Educação e Psicologia - Universidade do Minho.
- Silva, R. S. (2015). *Cadeias de Markov e Modelagem Matemática: da Abstração Pseudo-empírica à abstração Refletida com uso de objetos virtuais*. Tese de doutoramento. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Obtido em <http://hdl.handle.net/10183/133193>

- Silva, V. d. S., & Kluber, T. E. (2012). Modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: uma investigação imperativa. *Revista Eletrônica de Educação*, 6(2), 228-249.
- Skoumpourdi, C. (2010). The number line: An auxiliary means or an obstacle. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 270-282.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, 14, 66-91.
- Sostisso, A. F. (2014). *Modelação matemática: competência científica de uma licenciatura em matemática*. Tese de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Obtido de <http://hdl.handle.net/10923/6852>
- Sousa, A. F. G. (2016). *A resolução de problemas com crianças do pré-escolar e do 1º Ciclo do Ensino Básico*. Tese de Mestrado em Ensino Pré-escolar e 1.º Ciclo do Ensino Básico. Universidade de Aveiro. Obtido de <http://hdl.handle.net/10400.3/1549>
- Sousa, D. B. (2015). Uma proposta didática utilizando a modelagem matemática como ambiente de aprendizagem para o ensino de geometria. In *Atas do XI ENEM, Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas*. 1-13. Curitiba, PR: SBEM.
- Sousa, M. J., & Baptista, C. S. (2012). *Como fazer investigação, dissertações, teses e relatórios: Segundo Bolonha*. Lisboa: PACTOR - Edições de Ciências Sociais, Forenses e da Educação.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Stender, P. (2012). Facilitating complex modelling activities - the role of the teacher. In Cho, S. J. (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education, Intellectual and attitudinal challenges*. 3423-3430. Seoul: ICME.
- Stillman, G. A., Blum, W., & Kaiser, G. E. (2017). *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Stohlmann, M., DeVaul, L., Allen, C., Adkins, A., Ito, T., Lockett, D., & Wong, N. (2016). What Is Known about Secondary Grades Mathematical Modelling - A

- Review. *Journal of Mathematics Research*, 8(5), 12-28.
- Suh, J., Moyer, P. S., & Heo, H. J. (2005). Examining Technology Uses in the Classroom: Developing Fraction Sense Using Virtual Manipulative Concept Tutorials. *Journal of Interactive Online Learning*, 3(4), 1-21.
- Suh, J., & Moyer-Packenham, P. (2016). How Affordances and Constraints of Physical and Virtual Manipulatives Support the Development of Procedural Fluency and Algorithmic Thinking in Mathematics. *International Journal for Research in Mathematics Education*, 6(2), 245-265.
- Suh, J. M. (2005). *Third graders' mathematics achievement and representation preference using virtual and physical manipulatives for adding fractions and balancing equations*. Fairfax, Va.: George Mason University.
- Suh, J. M. (2016). Ambitious Teaching: Designing Practice-Based Assignments for Integrating Virtual Manipulatives into Mathematics Lessons. In Moyer-Packenham, P. S. (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives*. 301-321. Springer.
- Suh, J. M., & Moyer-Packenham, P. S. (2008, July). Scaffolding special needs students' learning of fraction equivalence using virtual manipulatives. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Ed.), *Proceedings of the 32nd annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*. 4, 297-304. Morelia, Mexico.: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- Teixeira, T. R. (2013). *Relatório de Estágio apresentado à Escola Superior de Educação de Bragança para obtenção do Grau de Mestre em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico*. Tese de Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico. Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Bragança. Obtido de <http://hdl.handle.net/10198/4233>
- Terry, M. K. (1995). *An Investigation of Differences in Cognition when Utilizing Math Manipulatives and Math Manipulative Software*. (Doctoral Dissertation), University of Missouri - Saint Louis, Saint Louis. (312)
- Thompson, P. (2013). The digital natives as learners: Technology use patterns and approaches to learning. *Computers & Education*, 65, 12-33.
- Treffers, A., & Buys, K. (2001). Grade 2 (and 3) - calculation up to 100. In *Children learn Mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp.

61-68). Holanda: Institute Freudenthal - Universidde de Utrech.

Tuckman, B. (2000). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Usiskin, Z. (2007). *The arithmetic operations as mathematical models*. Paper presented at the Modelling and Applications in Mathematics Education, New York.

Vale, I. (2002). *Materiais manipuláveis*. Viana do Castelo: ESE.

Vale, I., & Barbosa, A. (2014). Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria. *BOLETIM GEPEM*, 5, 3-16. Obtido de <http://dx.doi.org/10.4322/gepem.2015.011>

Van Zoest, L. R. E. (2006). *Teachers engaged in research: inquiry into mathematics classrooms, grades 9-12*. Connecticut: Information Age Publishing.

Vaz, S., Amado, N., & Carreira, S. (2017). *O Geogebra na Aprendizagem de Tópicos de Geometria de Alunos do 7.º Ano*. In Menezes, L., Ribeiro, A., Gomes, H., Martins, A. P., Tavares, F., & Pinto, H. (Ed.), *Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. 433-435. Viseu: APM.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. In *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 99-137). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vieira, A. F. E. (2016). *A aprendizagem da adição e subtração através da resolução de problemas*. Tese de Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Escola Superior de Educação - Instituto Politécnico de Setúbal. Obtido de <https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/17040>

Viseu, F., & Menezes, L. (2014). Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.º ciclo: O confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17 (3), 347-374.

Viseu, F., & Ponte, J. P. (2012). A formação do professor de Matemática apoiada pelas TIC, no seu estágio pedagógico. *Bolema Boletim de Educação Matemática Bolema*, 26(42 A), 329-357.

Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge MA: Harvard University Press.

Walliman, N. (2011). *Research methods: The basics*: Routledge.

- Winne, P. H., & Perry, N. E. (2000). Measuring self-regulated learning. In *Handbook of self-regulation* (pp. 531-566). San Diego: Academic Press
- Wright, J. L. (1994). Listen to the Children: Observing Young Children's Discoveries with the Microcomputer. In *Young Children: Active Learners in a Technological Age* (pp. 3-17). Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.
- Zimmerman, B. J., & Schunk, D. H. (1994). *Self-regulation of learning and performance: Issues and Educational Applications*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

APÊNDICES

Apêndice 1 – Questionário sobre literacia informática

Responde, sempre que possível com um X

Identificação

1. Idade_____

2. Género

☐ Masculino

☐ Feminino

Equipamentos informáticos

3. Tens computador em casa?

☐ Sim

☐ Não

Se respondeste não avança para a pergunta 12.

4. Utilizas o computador em casa?

☐ Sim

☐ Não

Se respondeste não avança para a pergunta 12.

5. Quantos dias por semana costumas usar o computador?

☐ Todos os dias.

☐ 1 a 2 dias por semana

☐ 3 a 5 dias por semana

☐ Nunca ou muito raramente (se esta é a tua resposta passa para a pergunta 14)

6. Como usas o computador?

☐ Sozinho

☐ Com ajuda Quem_____

7. O que sabes fazer no computador?

☐ Ligar e desligar o computador sozinho

☐ Usar o rato

☐ Usar o teclado

☐ Jogar

☐ Outras situações.

Quais_____

8. Quantos computadores já usaste?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

9. Quantas pessoas que usam o computador para trabalhar conheces?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

10. Para que te serves do computador?

- ☐ Escrever
- ☐ Desenhar e pintar
- ☐ Jogar
- ☐ Trabalhos de casa
- ☐ Programas que ajudam a aprender
- ☐ Ver vídeos e ouvir música
- ☐ Outras situações.

Quais _____

11. Diz o que mais gostas de fazer no computador.

- ☐ Escrever
- ☐ Desenhar e pintar
- ☐ Jogar
- ☐ Trabalhos de casa
- ☐ Programas que ajudam a aprender
- ☐ Ver vídeos e ouvir música
- ☐ Outras situações.

Quais _____

12. Gostas de usar o computador na sala de aula?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Porquê? _____

13. Tens tablet em casa?

- ☐ Sim
- ☐ Não

14. Utilizas o tablet em casa?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Se respondeste não avança para a pergunta 20.

15. Quantos dias por semana costumás usar o tablet?

- ☐ Todos os dias.
- ☐ 1 a 2 dias por semana
- ☐ 3 a 5 dias por semana
- ☐ Nunca ou muito raramente (se esta é a tua resposta passa para a pergunta 20)

16. Como usas o tablet?

- ☐ Sozinho
- ☐ Com ajuda Quem _____

17. O que sabes fazer no tablet?

- ☐ Ligar e desligar o tablet sozinho
- ☐ Jogar
- ☐ Outras situações.

Quais _____

18. Para que te serves do tablet?

- ☐ Escrever
- ☐ Desenhar e pintar
- ☐ Jogar
- ☐ Ver vídeos e ouvir música
- ☐ Outras situações.

Quais _____

19. Diz o que mais gostas de fazer no tablet.

- ☐ Escrever
- ☐ Desenhar e pintar
- ☐ Jogar
- ☐ Ver vídeos e ouvir música
- ☐ Outras situações.

Quais _____

20. Gostavas de usar o tablet na sala de aula?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Porquê? _____

21. Se usas o computador e o tablet, diz qual gostas mais?

☐ Computador

☐ Tablet

Porquê? _____

Muito obrigado pela tua colaboração.

Apêndice 2 – Fases do estudo

Quadro 6 – Cronograma das sessões de intervenção

Fase Inicial	Fase de Intervenção						Fase Final
12 de fevereiro	Exploração das <i>applets</i>	Sentido					2 de junho
		Acrescentar	Retirar	Completar	Comparar	Juntar	
	12 de abril	26 de abril	3 de maio	10 de maio	17 de maio	31 de maio	

Fase Inicial:

Esta etapa do presente estudo teve como objetivos mapear as dificuldades dos alunos e recolher informações que permitissem a formação dos pares que atuaram durante a fase de intervenção. Para o efeito, optou-se com um conjunto de tarefas escritas (cf. Apêndice 3), construído pela equipa de investigação, cujo enunciado continha situações problemáticas relativas a cada um dos sentidos das operações adição e subtração. Casos de Modelação Matemática da tipologia 1, em que o “professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução” (Barbosa, 2001). Assim, foi facultado aos alunos uma folha de trabalho – construída de forma a refletir uma situação da vivência dos alunos – com a informação necessária para a resolução das situações problemáticas. Todo o trabalho desenvolvido foi feito com base na folha de trabalho fornecida pelo PE, resolvida individualmente pelos alunos.

Importa referir que nesta sessão, à semelhança de outras devidamente identificadas, foi o PE a efetuar a leitura do enunciado da tarefa, uma vez que as competências de leitura e escrita do grupo na altura assim o ditaram. Para conseguirem resolver uma situação problemática, os alunos precisam de ler, ou que alguém leia, o enunciado (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008). Também no registo das respostas foi necessária a colaboração do PE, limitando-se apenas a auxiliar na componente ortográfica, quando solicitado, o conteúdo foi da autoria dos alunos.

Fase de intervenção:

Em cada uma destas sessões, os pares deslocam-se para a biblioteca da escola, local onde estão disponíveis os computadores portáteis, sentam-se sempre nos mesmos lugares, e são distribuídas as folhas de trabalho (cf. Apêndice 7), criadas pela equipa de investigação de acordo com as diretrizes estabelecidas, de modo a que as situações problemáticas fossem

geradoras de modelos (Lesh & Doerr, 2003). A resolução é produto de uma colaboração entre o PE e os alunos, cabendo ao primeiro acompanhar os processos dos alunos, através do diálogo e questionamento, sempre com o objetivo de auxiliar a investigação e descoberta dos alunos, tendo em conta o contexto escolar e o currículo.

Após todos os pares concluírem as tarefas propostas no guião, segue-se a discussão, onde os pares têm oportunidade de explicar o que fizeram, justificando cada passo dado. Uma vez terminada a intervenção de um par, a restante turma pode pronunciar-se acerca do que foi dito, iniciando-se de seguida um novo ciclo com o par seguinte. O PE só usa da palavra depois de todos os pares terem tido oportunidade de falar, exceto quando é necessário fazer alguma correção ou esclarecer o que foi dito pelos alunos.

A sessão encerra com a avaliação pelos alunos, esta última parte já não é feita juntos dos computadores, mas sim numa área da biblioteca onde existem sofás e poufs. Além de ser pedida a opinião relativamente ao que foi feito, os alunos são incentivados a sugerir alterações e melhorias no formato das sessões. O contributo dos alunos na avaliação de cada sessão influenciou a planificação da seguinte. Ainda que existisse um plano de intervenção desenhado pela equipa de investigação, procurou-se ajustar, quando possível, às sugestões dos alunos, garantindo o seu espaço de decisão.

Apenas nas duas primeiras sessões a folha de exploração foi lida pelo PE, uma vez que a competência leitura da turma na altura era ainda insuficiente para se operacionalizar de outro modo. A calendarização das sessões obedeceu a constrangimentos logísticos, já que a turma só tinha acesso ao espaço uma vez por semana, ficou estabelecido que as sessões iriam ocorrer no primeiro tempo de cada terça-feira.

Neste conjunto de sessões, a recolha de dados operacionalizou-se da seguinte forma: observação participante e notas de campo; registo dos procedimentos dos alunos nas *applets* e do áudio dos seus diálogos através de *screen recording*, recorrendo ao software *FlashBack Express Recorder*, instalado em todos os computadores portáteis; registos escritos das produções dos alunos nas folhas de exploração; registo áudio dos momentos de discussão e avaliação da sessão, recorrendo a gravador de áudio digital. A primeira análise dos dados recolhidos foi feita antes da sessão seguinte, de forma a cruzar as diferentes fontes, no sentido de procurar melhorias para a sessão seguinte, tendo também em conta os contributos dos alunos na avaliação da sessão.

Sessão de exploração

Esta primeira sessão tinha dois objetivos: 1) permitir aos alunos perceberem o computador como uma ferramenta educativa, por oposição à noção exclusiva de ludicidade, patente nos resultados do questionário; 2) familiarizarem-se com o ambiente de trabalho e os instrumentos. Para tal foram gizados dois planos, um mais diretivo – para o caso de os alunos não conseguirem explorar as *applets* de forma autónoma e necessitarem de instruções – e outro mais aberto, onde cabia aos alunos o papel principal na condução da exploração.

De forma a familiarizar o grupo com os manipulativos virtuais, a sessão focou-se nas *applets* *Base Blocks* (Figura 78), *Base Blocks Addition* (Figura 79) e *Base Blocks Subtraction* (Figura 80), todas elas disponíveis no site da National Library of Virtual Manipulatives (www.nlvm.usu.edu).

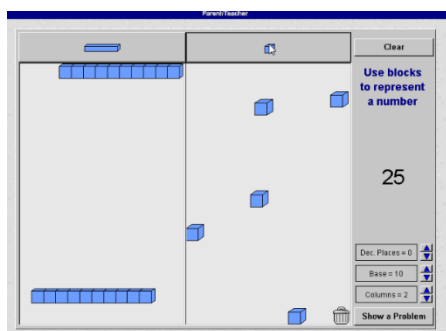


Figura 78 – Base Blocks

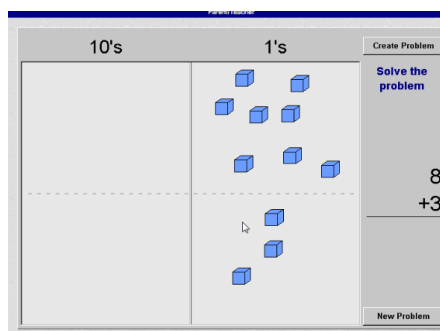


Figura 79 – Base Blocks Addition

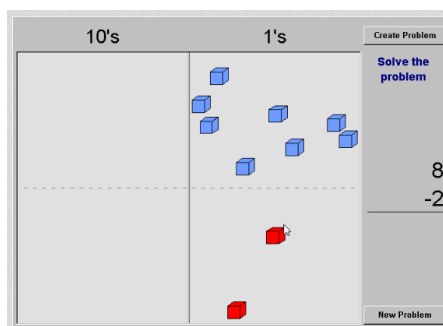


Figura 80 – Base Blocks Subtraction

Para o efeito, foi criada pela equipa de investigação uma folha de exploração (Figura 81) com um conjunto de tarefas, cuja sequência servia os seguintes propósitos:

- Representar números compostos apenas por unidades, por dezenas e finalmente por unidades e dezenas;

- Efetuar adições com agrupamento, que impliquem compor uma unidade de ordem superior (Ma, 2009), iniciando com operações que envolvessem apenas unidades e de seguida operações que envolvessem unidades e dezenas;
- Efetuar subtrações sem reagrupamento e de seguida com reagrupamento, evidenciando a necessidade de decompor uma unidade de ordem superior (Ma, 2009).

Folha de exploração

1 – Representem os números 6, 10, 13, 18, 24 e 33.

2 – Ouve as instruções com atenção e resolve as operações que se seguem

$$4+6= \quad 8+3= \quad 14+9= \quad 25+8=$$

3 – Ouve as instruções com atenção e resolve as operações que se seguem

$$8-2= \quad 12-10= \quad 12-6= \quad 24-19=$$

Figura 81 – Folha de exploração

Terminada a exploração das *applets* com as tarefas propostas, foi feita a avaliação da sessão pelos alunos.

Nota: ainda que não faça parte da calendarização das sessões, no dia 19 de abril ocorreu uma sessão com foco no sentido da adição juntar. No entanto, devido a uma falha crítica do software de *screen recording* – que obrigou inclusive a optar por software diferente o inicialmente escolhido para as restantes sessões –, não foi possível recolher dados relativamente ao uso dos manipulativos virtuais. Assim, foi decidido pela equipa de investigação calendarizar uma nova sessão dedicada ao sentido juntar, numa data em que o espaço estivesse novamente disponível.

Sentido acrescentar

Na sessão anterior, durante a discussão, os alunos foram questionados acerca do grau de autonomia pretendido, ficou estabelecido que iriam usufruir de liberdade para descobrir e errar, ao PE caberia o papel de suporte caso necessitassem de ajuda. Depois de os pares ocuparem os seus lugares na biblioteca, distribuíram-se as folhas de trabalho (cf. Apêndice 7) e os alunos iniciaram as suas tarefas. A primeira, resolução de um conjunto de adições, tinha como objetivo explorar a mecânica da *applet*; a segunda pedia aos alunos que criassem e resolvessem duas adições, recorrendo ao manipulativo virtual, fomentado a autonomia, tal como foi decidido pelo grupo; a terceira apresentava um problema, resolvido através da MMCAA.

O manipulativo virtual escolhido para esta sessão, reta numérica (Figura 82), foi criado pelo PE no software *GeoGebra*, com o intuito de responder às especificidades da turma (cf. Apêndice 4).

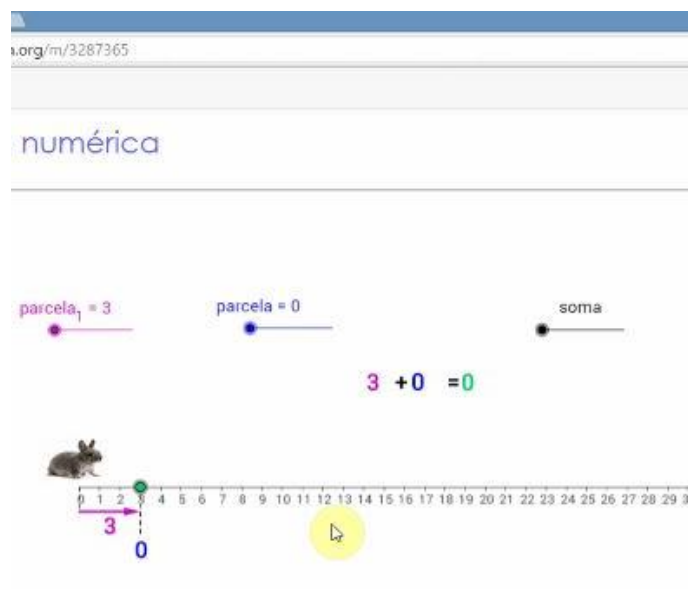


Figura 82 – Reta numérica em GeoGebra

Concluída a sequência de tarefas propostas, deu-se início à discussão das tarefas, a que se seguiu a discussão das tarefas e avaliação da sessão pelos alunos.

Sentido retirar

Tal como referido anteriormente, o carácter reflexivo desta proposta proporciona uma procura de melhoramentos no sentido de responder aos interesses dos alunos e objetivos da investigação. Esta sessão representa mais um passo na autonomia dos alunos, sendo o papel do professor mais centrado no acompanhamento, do que na orientação das tarefas. Após a distribuição das folhas de trabalho (cf. Apêndice 7), os alunos iniciaram as suas tarefas. A primeira, resolução de um conjunto de subtrações, tinha como objetivo recordar a mecânica da *applet Base Blocks Subtraction* (Figura 83), projetadas numa sequência de complexidade crescente – efetuar subtrações sem reagrupamento e de seguida com reagrupamento, evidenciando a necessidade de decompor uma unidade de ordem superior (Ma, 2009); a segunda tarefa continha uma situação problemática, resolvida através da MMCAA, recorrendo ao manipulativo virtual como estratégia de resolução; a terceira pedia aos alunos que criassem e resolvessem subtrações à escolha, recorrendo ao manipulativo virtual, espaço para trabalho autónomo e de exploração livre dos conceitos trabalhados.

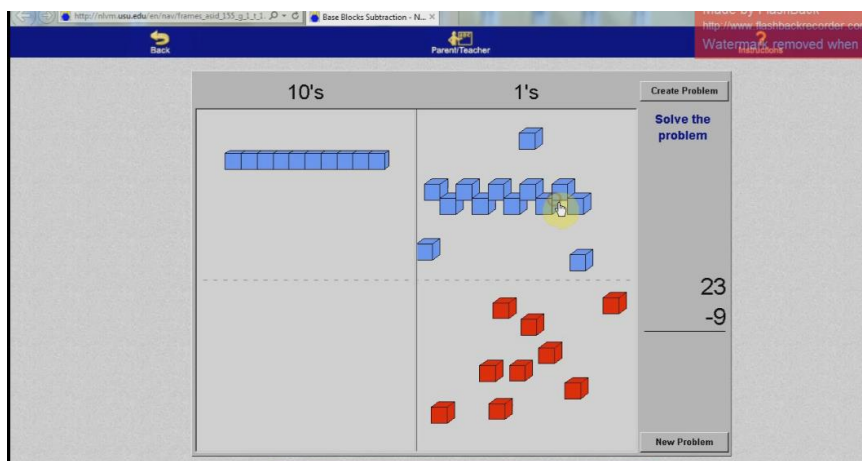


Figura 83 – Base Blocks Subtraction

Concluída a sequência de tarefas propostas, deu-se início à discussão das tarefas, a que se seguiu a discussão das tarefas e avaliação da sessão pelos alunos.

Sentido completar

Após a distribuição das folhas de trabalho (cf. Apêndice 7), os alunos iniciaram as suas tarefas. A primeira, resolução de um conjunto de subtrações, tinha como objetivo explorar a mecânica da *applet Subtração – reta numérica*, semelhante à usada na sessão Acrescentar; a segunda tarefa continha uma situação problemática, resolvida através da MMCAA, recorrendo ao manipulativo virtual como estratégia de resolução; a terceira pedia aos alunos que criassem e resolvessem subtrações à escolha, recorrendo ao manipulativo virtual.

Concluída a sequência de tarefas propostas, deu-se início à discussão das tarefas, a que se seguiu a discussão das tarefas e avaliação da sessão pelos alunos. O manipulativo virtual escolhido para esta sessão, *Subtração – reta numérica* (Figura 84), foi criado pelo PE no software *GeoGebra*, com o intuito de responder às especificidades da turma (cf. Apêndice 4).

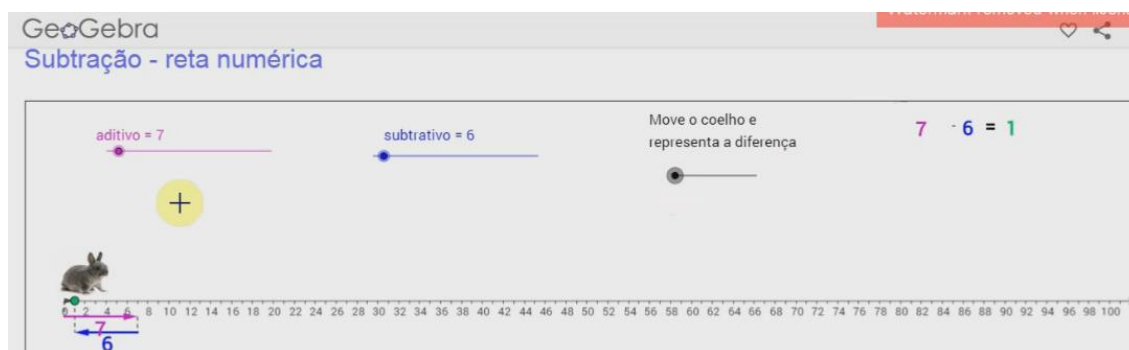


Figura 84 – Applet Subtração reta numérica

Sentido comparar

Como habitualmente, foram distribuídas as folhas de trabalho (cf. Apêndice 7) e os alunos iniciaram as suas tarefas – uma vez que a *applet* era já conhecida dos alunos, considerou-se desnecessária a tarefa de exploração da mecânica da *applet*. A primeira tarefa, uma situação problemática, foi resolvida através da MMCAA, recorrendo ao manipulativo virtual como estratégia de resolução. A tarefa final pedia aos alunos que criassem e resolvessem subtrações à escolha, recorrendo ao manipulativo virtual.

Concluída a sequência de tarefas propostas, deu-se início à discussão das tarefas, a que se seguiu a discussão das tarefas e avaliação da sessão pelos alunos. O manipulativo virtual escolhido para esta sessão, reta numérica (Figura 85), foi criado pelo PE no software *GeoGebra*, com o intuito de responder às especificidades da turma (cf. Apêndice 4).

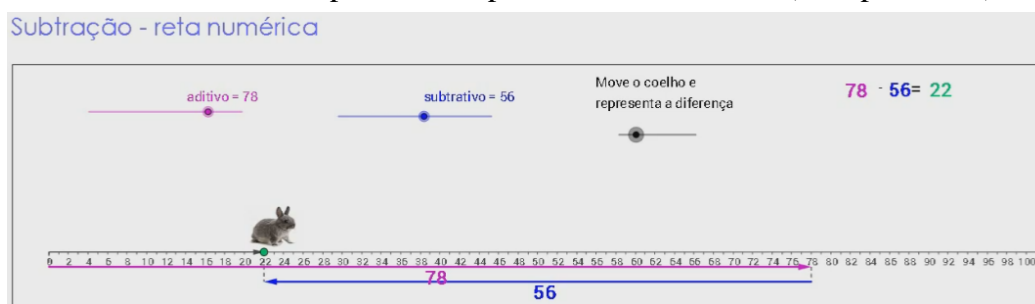


Figura 85 - *Applet* Subtração reta numérica

Sentido juntar

A estrutura desta última intervenção reflete a componente evolutiva da proposta, na qual a avaliação das sessões pelos alunos e a reflexão crítica do PE sobre cada sessão teve um papel determinante. É nessa lógica que a folha de trabalho (cf. Apêndice 7) assume duas vertentes, uma situação problemática na fase inicial e exploração livre da *applet Base Blocks Addition* a fechar. Esta sessão tem uma característica muito particular, trata-se de uma reformulação da primeira intervenção, uma vez que o software de *screen recording* inicialmente escolhido se revelou inadequado, impedindo a recolha de dados, forçando a recalendarização da sessão. Não se trata de um duplicado da sessão inicial, mas sim uma versão reformulada com os contributos da análise de todas as intervenções anteriores.

Depois de ocuparem o seu posto junto dos computadores, cada par recebeu a folha de exploração e iniciaram as suas tarefas. A primeira, uma situação problemática, resolvida através da MMCAA, recorrendo ao manipulativo virtual (Figura 86) como estratégia de

resolução. A tarefa final pedia aos alunos que criassem e resolvessem adições à escolha, recorrendo ao manipulativo virtual.

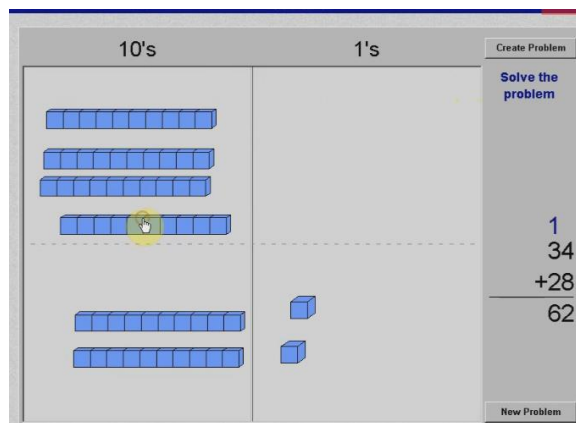


Figura 86 – Base Blocks Addition

Concluída a sequência de tarefas propostas, deu-se início à discussão das tarefas, a que se seguiu a discussão das tarefas e avaliação da sessão pelos alunos.

Fase Final:

Composta pelo conjunto de tarefas escritas (cf. Apêndice 5), realizado em moldes idênticos à Fase Inicial, com exceção da leitura do enunciado das situações problemáticas pelo PE. Tendo em conta as competências de leitura e de escrita dos alunos na altura, foram distribuídas as folhas de trabalho, resolvidas individualmente pelos alunos de forma autónoma.

Apêndice 3 – Tarefas da Fase Inicial



Folha de trabalho de Matemática – 1º ANO

Nome: _____

Data: _____

Para cada uma das tarefas que se seguem, explica sempre a estratégia que usaste para chegar à tua resposta.

1. O António gosta muito de ver filmes. Na sua coleção tem 6 filmes sobre animais e 8 sobre super-heróis. Quantos filmes tem o António?

2. Nas férias de Carnaval a Luísa ajudou o irmão a fazer uma máscara com jornais. A Luísa usou 4 jornais, para terminar a máscara o irmão usou 5 jornais. Quantos jornais foram precisos para fazer a máscara?

3. A turma do 1.º A já aprendeu 13 letras. 5 são vogais. Quantas são as consoantes que já conhecem?

4. A caixa de marcadores da Rita tem espaço para 12 marcadores, mas ainda só tem 9. Quantos marcadores pode comprar a Rita para ficar com a caixa cheia?

5. O Algodão e a Guga são duas zebras. O algodão tem 10 riscas pretas e a Guga tem 15. Quantas riscas tem a Guga a mais do que o Algodão?

Apêndice 4 – Manipulativos Virtuais usados no estudo

Os manipulativos virtuais escolhidos para a fase de intervenção do presente estudo cumprem os seguintes critérios: 1) são gratuitos e compatíveis com o sistema operativo instalado nos computadores disponíveis para uso dos alunos; 2) permitem trabalhar os conteúdos curriculares previstos nos documentos curriculares para o 1.º ano do 1.º CEB (sentidos da adição e da subtração); 3) são ferramentas que permitem trabalho autónomo por parte dos alunos, contendo instruções ou passíveis de usar após breves instruções fornecidas pelo PE; 4) permitem sistematizar conhecimentos relativos aos sentidos da adição e da subtração; 5) criar condições de partida sólidas para a aprendizagem com compreensão dos algoritmos da adição e da subtração, próxima etapa no processo de ensino e de aprendizagem da adição e da subtração.

Reta numérica Adição

Uma pesquisa prévia sobre manipulativos virtuais, disponíveis sem custos, para os objetivos propostos para a sessão revelou-se infrutífera. Tendo em conta as características da turma e o conhecimento do PE do software GeoGebra, optou-se por criar um manipulativo virtual neste software que:

- Possibilite a visualização dos conceitos matemáticos envolvidos (Moyer-Packenham, Ulmer, & Anderson, 2012; Lin, Shao, Wong, Li, & Niramitranon, 2011) tornando visível a noção do sentido acrescentar, através da manipulação das *slide bars*, uma vez que a reta numérica permite representar números e formar modelos geométricos para operações aritméticas (Skoumpourdi, 2010);
- proporcione feedback imediato e assegure que os conceitos matemáticos são reforçados corretamente (Durmus & Karakirik, 2006; Suh & Moyer-Packenham, 2008; Burns & Hamm, 2011), conseguido com a leitura da reta numérica e das *slide bars* parcela e soma;
- limite o valor dos números às quantidades já trabalhadas pelos alunos, reforce a importância do rigor na construção da reta numérica e incentive o uso dos termos matemáticos adequados no discurso dos alunos, tirando partido das valências e restrições do manipulativo virtual (Drickey, 2000; Akihiko, 2002; Izydorczak, 2003; Dorward, 2004; Reimer & Moyer, 2005; Suh J. M., 2005; Shih, 2015; Suh & Moyer-Packenham, 2016);

- permite ações simples de mudança, repetição e de desfazer, estabelecer ligar dinamicamente diferentes representações e manter uma conexão estrita entre os objetos retratados e símbolos (Clements & McMillen, 1996);
- permite que alunos e professores coloquem e solucionem as suas próprias situações problemáticas (Clements & McMillen, 1996);
- permite que os alunos desenvolvam o controle crescente de uma ferramenta matemática flexível e extensível (Clements & McMillen, 1996).

Base Blocks Subtraction

Este manipulativo foi o escolhido para a sessão retirar. A decisão prende-se com o facto de este ser um manipulativo virtual que:

- era já conhecido do PE, pois foi objeto de estudo na unidade curricular Matemática IV da Licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação de Coimbra;
- possibilita a visualização dos conceitos matemáticos envolvidos (Moyer-Packenham, Ulmer, & Anderson, 2012; Lin, Shao, Wong, Li, & Niramitranon, 2011), tornando visível a noção do sentido retirar, através da manipulação das barras e cubos, retirando o subtrativo ao aditivo (com a anulação de quantidades) para obter a diferença, assim como o processo de decompor uma unidade de ordem superior (Ma, 2009);
- proporciona feedback imediato e assegure que os conceitos matemáticos são reforçados corretamente (Durmus & Karakirik, 2006; Suh & Moyer-Packenham, 2008; Burns & Hamm, 2011);
- limita o valor dos números às quantidades já trabalhadas pelos alunos, reforça a compreensão da subtração com reagrupamento e a decomposição de uma unidade de ordem superior, tirando partido das valências e restrições do manipulativo virtual (Drickey, 2000; Akihiko, 2002; Izydorczak, 2003; Dorward, 2004; Reimer & Moyer, 2005; Suh J. M., 2005; Shih, 2015; Suh & Moyer-Packenham, 2016);
- permite ações simples de mudança, repetição e de desfazer, estabelecer ligar dinamicamente diferentes representações e manter uma conexão estrita entre os objetos retratados e símbolos (Clements & McMillen, 1996);

- permite que alunos e professores coloquem e solucionem as suas próprias situações problemáticas (Clements & McMillen, 1996);
- permite que os alunos desenvolvam o controle crescente de uma ferramenta matemática flexível e extensível (Clements & McMillen, 1996).

Reta numérica Subtração

De forma análoga ao que foi feito para o manipulativo Reta numérica adição, optou-se por criar um manipulativo virtual no software GeoGebra que:

- possibilite a visualização dos conceitos matemáticos envolvidos (Moyer-Packenham, Ulmer, & Anderson, 2012; Lin, Shao, Wong, Li, & Niramitranon, 2011), tornando visível a noção dos sentidos completar e comparar, através da manipulação das *slide bars*, uma vez que a reta numérica permite representar números e formar modelos geométricos para operações aritméticas (Skoumpourdi, 2010);
- proporcione feedback imediato e assegure que os conceitos matemáticos são reforçados corretamente (Durmus & Karakirik, 2006; Suh & Moyer-Packenham, 2008; Burns & Hamm, 2011), conseguido com a leitura da reta numérica e das *slide bars* aditivo, subtrativo e diferença;
- limite o valor dos números às quantidades já trabalhadas pelos alunos, reforce a importância do rigor na construção da reta numérica e incentive o uso dos termos matemáticos adequados no discurso dos alunos, tirando partido das valências e restrições do manipulativo virtual (Drickey, 2000; Akihiko, 2002; Izydorcak, 2003; Dorward, 2004; Reimer & Moyer, 2005; Suh J. M., 2005; Shih, 2015; Suh & Moyer-Packenham, 2016);
- permite ações simples de mudança, repetição e de desfazer, estabelecer ligar dinamicamente diferentes representações e manter uma conexão estrita entre os objetos retratados e símbolos (Clements & McMillen, 1996);
- permite que alunos e professores coloquem e solucionem as suas próprias situações problemáticas (Clements & McMillen, 1996);
- permite que os alunos desenvolvam o controle crescente de uma ferramenta matemática flexível e extensível (Clements & McMillen, 1996).

Base Blocks Addition

Este manipulativo foi o escolhido para a sessão juntar. A decisão prende-se com o facto de este ser um manipulativo virtual que:

- Ser já conhecido do PE, pois foi objeto de estudo na unidade curricular Matemática IV da Licenciatura em Educação Básica;
- possibilita a visualização dos conceitos matemáticos envolvidos (Moyer-Packenham, Ulmer, & Anderson, 2012; Lin, Shao, Wong, Li, & Niramitranon, 2011), tornando visível a noção do sentido juntar, através da manipulação das barras e cubos, juntando as quantidades representadas em ambas as parcelas para obter a soma, assim como o processo de compor uma unidade de ordem superior (Ma, 2009);
- proporciona feedback imediato e assegure que os conceitos matemáticos são reforçados corretamente (Durmus & Karakirik, 2006; Suh & Moyer-Packenham, 2008; Burns & Hamm, 2011);
- limita o valor dos números às quantidades já trabalhadas pelos alunos, reforça a compreensão da subtração com reagrupamento e a decomposição de uma unidade de ordem superior, tirando partido das valências e restrições do manipulativo virtual (Drickey, 2000; Akihiko, 2002; Izydorczak, 2003; Dorward, 2004; Reimer & Moyer, 2005; Suh J. M., 2005; Shih, 2015; Suh & Moyer-Packenham, 2016);
- permite ações simples de mudança, repetição e de desfazer, estabelecer ligar dinamicamente diferentes representações e manter uma conexão estrita entre os objetos retratados e símbolos (Clements & McMillen, 1996);
- permite que alunos e professores coloquem e solucionem as suas próprias situações problemáticas (Clements & McMillen, 1996);
- permite que os alunos desenvolvam o controle crescente de uma ferramenta matemática flexível e extensível (Clements & McMillen, 1996).

Apêndice 5 – Tarefas da Fase Final



Folha de trabalho de Matemática – 1º ANO

Nome: _____

Data: _____

Para cada uma das tarefas que se seguem, explica sempre a estratégia que usaste para chegar à tua resposta.

1. O Sérgio gosta muito do seu gato Farrusco. Já lhe comprou 46 bolas e 38 bonecos. Quantos brinquedos tem o Farrusco?

R: _____

2. Na biblioteca da Solum Sul estavam 53 livros. A escola comprou mais 41. Quantos livros tem a biblioteca agora?

R: _____

3. A Alice tinha trinta e sete berlindes, mas perdeu dezanove. Com que quantidade de berlindes ficou?

R: _____

4. O livro de matemática da escola Solum Norte tem 83 páginas. A turma do 1.º B já vai na página 76. Quantas páginas faltam para terminarem o livro?

R: _____

5. A Académica fez 25 pontos neste campeonato de futebol. No anterior fez 39. Qual é a diferença de pontos conseguidos nos dois campeonatos?

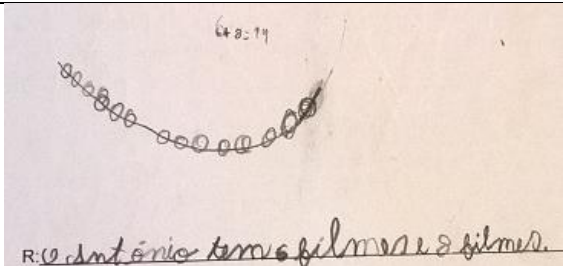
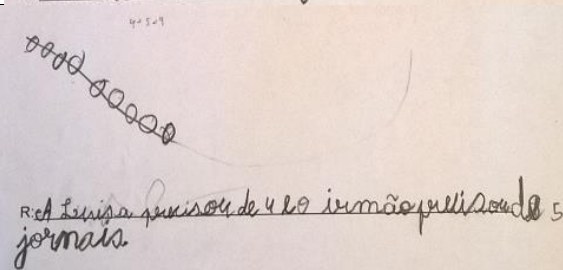
R: _____

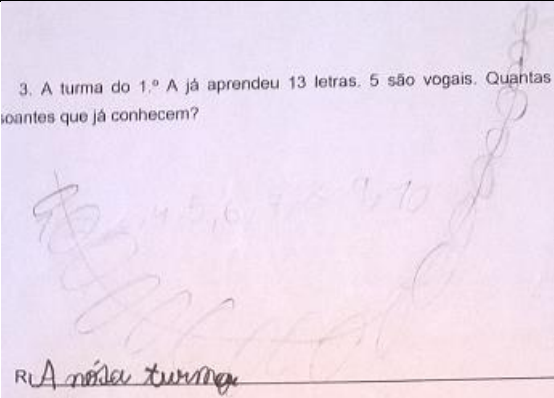
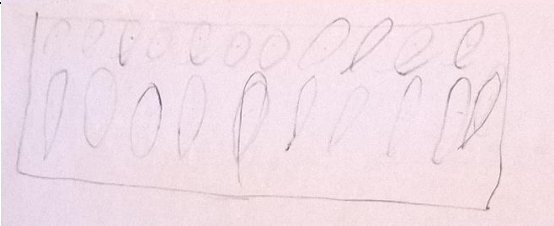
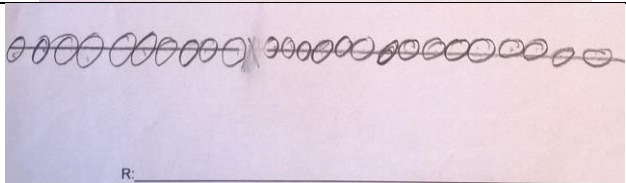
Apêndice 6 – Resultados da Fase Inicial

Quadro 7 – Classificação dos alunos nas tarefas da Fase Inicial

Alunos	Tarefas					Nível dos alunos
	Juntar	Acrescentar	Retirar	Completar	Comparar	
A	1	1	1	1	1	1
B	3	2	2	1	2	2
C	3	3	2	2	2	2
D	3	3	3	2	2	3

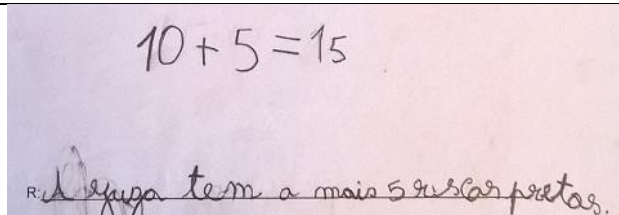
Aluno A

Sentido das operações		Evidências	Observações
Adição	Juntar	 <p>6 + 8 = 14</p> <p>R: 6 António tem 6 filmes e 8 filmes.</p>	Em ambas resoluções, o aluno A utiliza a representação do colar de contas como estratégia de resolução, reconhecendo o sentido presente na situação problemática e os dados correspondentes a cada parcela da operação que efetua. No entanto, não estabelece qualquer relação entre a soma e a resposta, encontrando-se no nível 1 dos critérios estabelecidos.
	Acrescentar	 <p>4 + 5 = 9</p> <p>R: A Teresa possui 4 e o irmão possui 5 jornais.</p>	

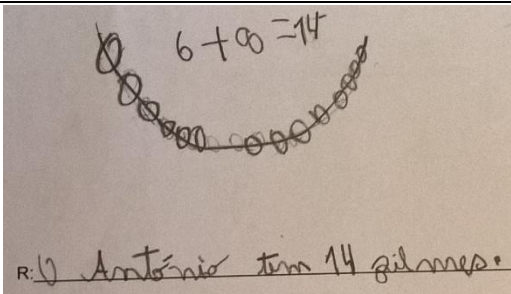
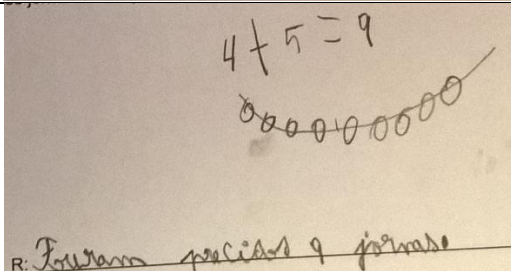
Subtração	Retirar		O aluno A recorre novamente à representação do colar de contas como estratégia de resolução, possível de interpretar apesar de o ter apagado. Representa apenas as quantidades da situação problemática, não evidencia qualquer tentativa de resolução do problema, encontrando-se no nível 1 dos critérios estabelecidos.
	Completar		Novamente, apenas tenta uma representação das quantidades que apaga. Não existem evidências de qualquer tentativa de resolução, encontrando-se no nível 1 dos critérios estabelecidos.
	Comparar		Tal como nos restantes problemas que envolvem os sentidos da subtração, apenas representa as quantidades. Não existem evidências de qualquer tentativa de resolução, encontrando-se no nível 1 dos critérios estabelecidos.

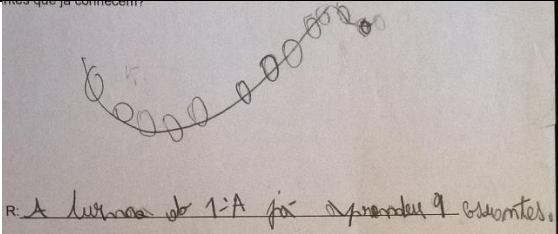
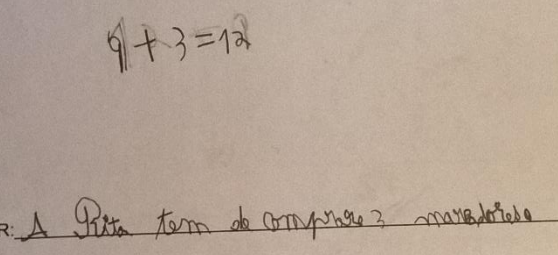
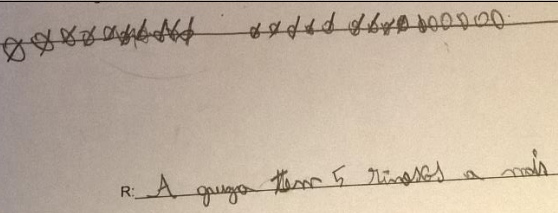
Aluna B

Sentido das operações		Evidências	Observações
Adição	Juntar		A aluna B opta pela estratégia da representação do colar de contas para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção. As evidências colocam a aluna no nível 3 dos critérios estabelecidos.
	Acrescentar		A aluna B comete um lapso, sendo necessário interpretar a resposta dada para acompanhar o raciocínio da aluna, motivo pelo qual se situa no nível 2 dos critérios estabelecidos.
Subtração	Retirar		A aluna B comete um erro ao indicar ao trocar o sinal da subtração pelo da adição, motivo pelo qual se enquadra no nível 2 dos critérios estabelecidos.
	Completar		Ao interpretar o problema como uma adição, evidencia não compreender o sentido completar da subtração – ainda que o tenha usado intuitivamente para obter a quantidade em falta –, assim como da subtração enquanto operação inversa da adição, motivo pelo qual se enquadra no nível 1 dos critérios estabelecidos.

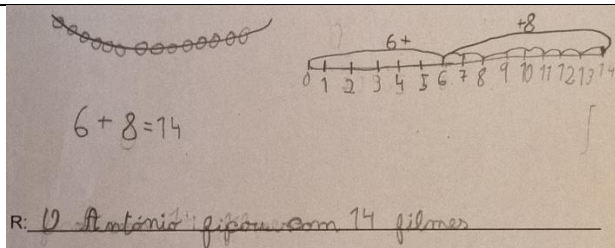
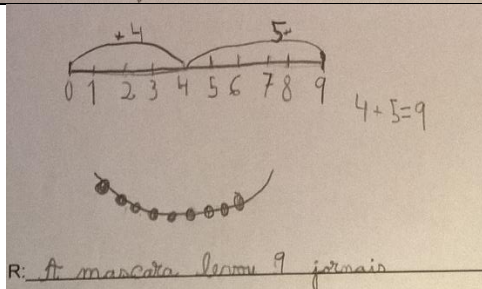
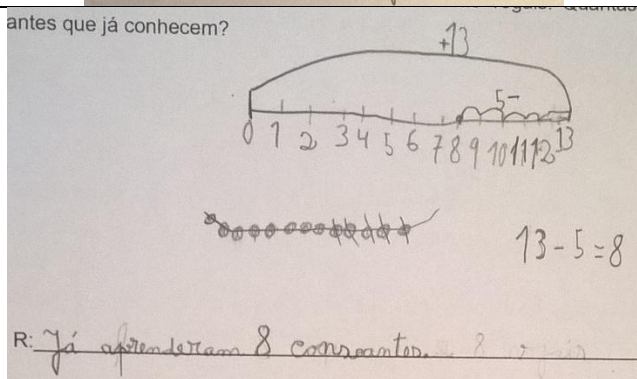
	Comparar		<p>Ao interpretar o problema como uma adição, evidencia não compreender totalmente o sentido completar da subtração, assim como da subtração enquanto operação inversa da adição. No entanto, a sua resposta escrita recorre ao sentido comparar, motivo pelo qual se enquadra no nível 2 dos critérios estabelecidos.</p>
--	----------	--	--

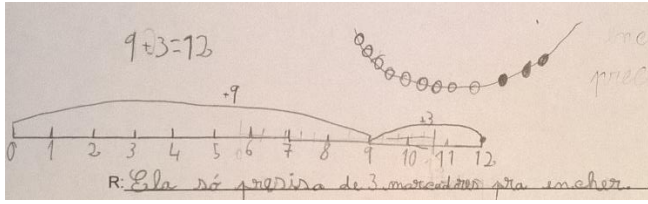
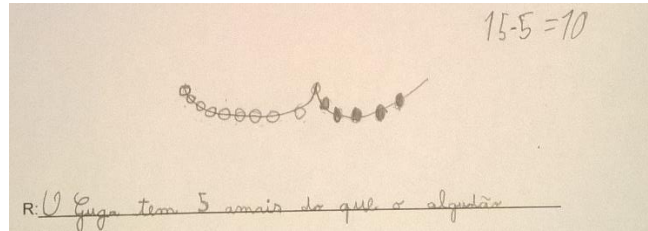
Aluno C

Sentido das operações		Evidências	Observações
Adição	Juntar		<p>O aluno C opta pela estratégia da representação do colar de contas para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a presença do sentido juntar na situação problemática. As evidências colocam o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.</p>
	Acrescentar		<p>O aluno C opta pela estratégia da representação do colar de contas para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a presença do sentido acrescentar na situação problemática. As evidências colocam o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.</p>

Subtração	Retirar		<p>Não é possível afirmar categoricamente que o aluno compreendeu a presença do sentido retirar presente na situação problemática, a sua resolução aparenta ter reconhecido o sentido retirar e que cometeu um erro de contagem.</p> <p>As evidências colocam o aluno no nível 2 dos critérios estabelecidos.</p>
	Completar		<p>Ainda que reconheça a presença do sentido completar na situação problemática, exprime formalmente a sua interpretação através da operação adição, na forma <i>missing addend</i>, como estratégia de resolução.</p> <p>As evidências colocam o aluno no nível 2 dos critérios estabelecidos.</p>
	Comparar		<p>O aluno escolhe uma estratégia que permite comparar duas quantidades, não é claro se usou uma estratégia de contagem ou reconheceu e recorreu ao sentido comparar da subtração.</p> <p>As evidências colocam o aluno no nível 2 dos critérios estabelecidos.</p>

Aluno D

Sentido das operações		Evidências	Observações
Adição	Juntar		O aluno D opta pela estratégia da representação do colar de contas e reta numérica para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a presença do sentido juntar na situação problemática. As evidências colocam o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.
	Acrescentar		O aluno D opta pela estratégia da representação do colar de contas e reta numérica para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a presença do sentido acrescentar na situação problemática. As evidências colocam o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.
Subtração	Retirar		O aluno D opta pela estratégia da representação do colar de contas e reta numérica para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a presença do sentido retirar na situação problemática. As evidências colocam o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.

	Completar		<p>Ainda que reconheça a presença do sentido completar na situação problemática, exprime formalmente a sua interpretação através da operação adição, na forma <i>missing addend</i>, recorrendo também à reta numérica e representação do colar de contas como estratégias de resolução. As evidências colocam o aluno no nível 2 dos critérios estabelecidos.</p>
	Comparar		<p>O aluno D opta pela estratégia da representação do colar de contas para a resolução da tarefa, sem qualquer incorreção, interpretando corretamente a presença do sentido comparar na situação problemática. No entanto, não atribui o significado correto às quantidades na operação subtração, comparando o aditivo com o valor que na realidade corresponde à diferença. As evidências colocam o aluno no nível 2 dos critérios estabelecidos.</p>

Apêndice 7 – Tarefas da Fase de Intervenção

Sessão de exploração

1 – Representem os números 6, 10, 13, 18, 24 e 33.

2 – Ouve as instruções com atenção e resolve as operações que se seguem

$$4 + 6 = ___ \quad 8 + 3 = ___ \quad 14 + 9 = ___ \quad 25 + 8 = ___$$

3 – Ouve as instruções com atenção e resolve as operações que se seguem

$$8 - 2 = ___ \quad 12 - 10 = ___ \quad 12 - 6 = ___ \quad 24 - 19 = ___$$

Sessão dedicada ao sentido acrescentar

1 – Ouve as instruções com atenção e resolve as operações que se seguem

$$3 + 5 = ___ \quad 9 + 7 = ___ \quad 14 + 9 = ___ \quad 25 + 18 = ___$$

2 – Cada um cria e resolve duas adições à escolha.

3 – As tartarugas vivem muito tempo, alguns mais de 100 anos. A nossa Titi já tem 28 anos. Que idade terá daqui a 16 anos?

R: _____

Sessão dedicada ao sentido retirar

1 – Ouve as instruções com atenção e resolve as operações que se seguem

$$9 - 5 = ___ \quad 16 - 4 = ___ \quad 23 - 9 = ___ \quad 58 - 18 = ___ \quad 74 - 37 = ___$$

2 – Para o almoço de hoje existem 76 pães. No primeiro turno comeram 38, quantos pode o 2.º turno comer?

R: _____

3 – Criem e resolvam subtrações à escolha.

Sessão dedicada ao sentido completar

1 – Ouve as instruções com atenção e resolve as operações que se seguem

$$7 - 6 = ___ \quad 17 - 3 = ___ \quad 22 - 5 = ___ \quad 38 - 18 = ___ \quad 83 - 44 = ___$$

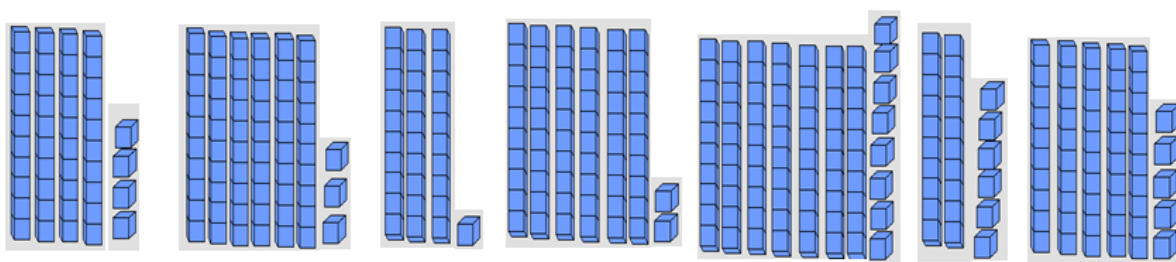
2 – Está na altura de planear mais uma visita de estudo, para isso precisamos de decidir quem vai em cada autocarro. O autocarro azul tem 42 lugares, do 1.º A vão 26 pessoas. Quantas crianças do 1.º B ainda podem ir neste autocarro?

R: _____

3 – Criem e resolvam subtrações à escolha.

Sessão dedicada ao sentido comparar

1 – O 1.º A fez um estudo sobre o consumo de água em casa, em casa do Ricardo gastam-se 56 litros de água por dia. Qual é a diferença de litros de água gastos na casa do Ricardo e em vossa casa?



Alexandre Melinda Beatriz Rudá Constança Filipa David Pedro F. Soares Martim Margarida Daniel Tiago T. Leonor P.

R: _____

2 – Criem e resolvam subtrações à escolha.

Sessão dedicada ao sentido juntar

1 – Na festa de final do ano o 1.º ano pode vestir-se de mágico e ajudantes de mágico. Trinta e quatro crianças vão vestir-se de mágicos, as outras 28 escolheram ser ajudantes. Quantas crianças do 1.º ano vão participar na festa?

R: _____

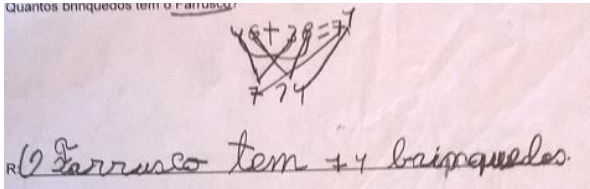
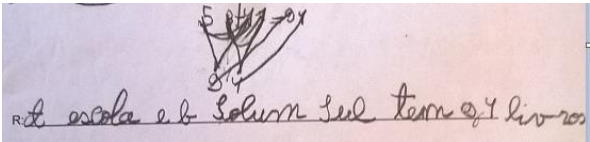
2 – Criem e resolvam adições à escolha.

Apêndice 8 – Resultados da Fase Final

Quadro 8 – Classificação dos alunos nas tarefas da Fase Final

Alunos	Tarefas					Nível dos alunos
	Juntar	Acrescentar	Retirar	Completar	Comparar	
A	2	3	2	1	1	2
B	3	3	3	3	3	3
C	3	3	3	3	3	3
D	3	3	3	3	3	3

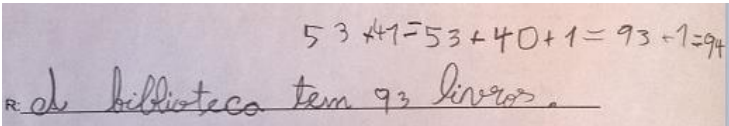
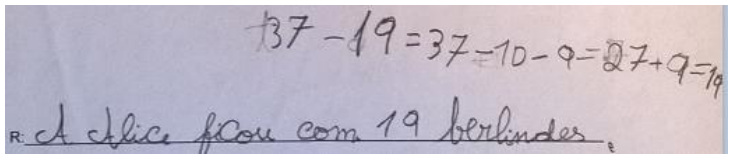
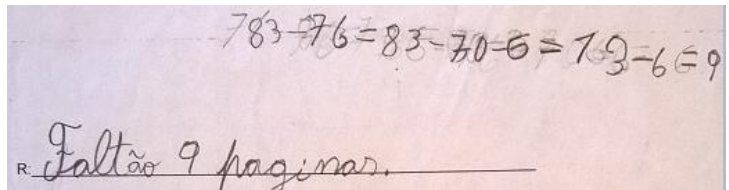
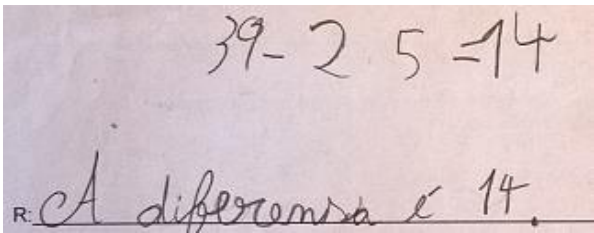
Aluno A

Sentido das operações		Evidências	Observações
Adição	Juntar		O aluno A, apesar cometer alguns erros processuais, com impacto no resultado final, evidencia compreender o sentido juntar, bem como os dados relativos a cada parcela e a relação entre a soma e a resposta à situação problemática. As evidências colocam o aluno no nível 2 dos critérios estabelecidos.
	Acrescentar		O aluno A evidencia reconhecer o sentido acrescentar, bem como os dados relativos a cada parcela, sem qualquer erro na implementação da estratégia de resolução escolhida. As evidências colocam o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.

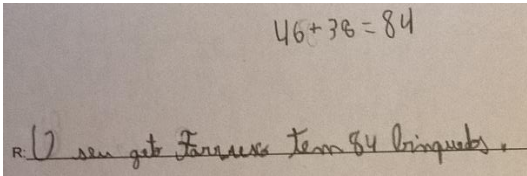
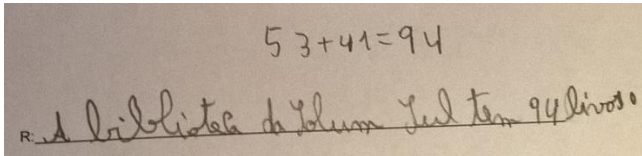
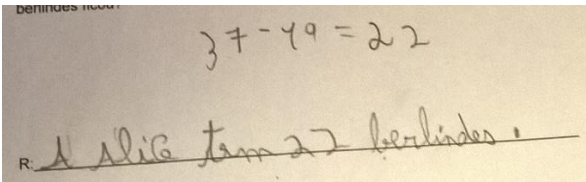
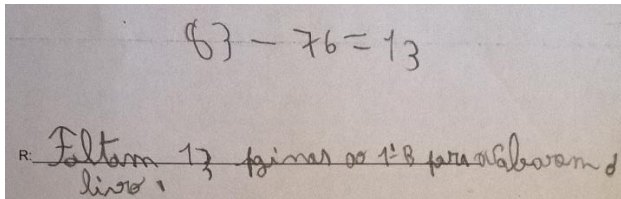
Subtração	Retirar		O aluno A, apesar cometer alguns erros processuais, com impacto no cálculo final, evidencia reconhecer o sentido retirar, bem como os dados relativos ao aditivo e subtrativo. As evidências colocam o aluno no nível 2 dos critérios estabelecidos.
	Completar		O aluno não compreende que a situação problemática remete para o sentido completar da subtração, além disso, a sua resolução da adição contém erros processuais. As evidências colocam o aluno no nível 1 dos critérios estabelecidos.
	Comparar		O aluno não compreende que a situação problemática remete para o sentido comparar da subtração. A sua tentativa de resolução indica que 25 é menor que 39 e a resposta produzida não vai ao encontro da situação problemática. Estas evidências colocam o aluno no nível 1 dos critérios estabelecidos.

Aluna B

Sentido das operações		Evidências	Observações
Adição	Juntar		A aluna compreende a presença do sentido juntar presente na situação problemática e identifica os dados correspondentes a cada parcela, estabelecendo uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática, não conseguindo, no entanto, evitar um erro de contagem. As evidências enquadram a aluna no nível 3 dos critérios estabelecidos.

	Acrescentar		A aluna compreende a presença do sentido acrescentar presente na situação problemática e identifica os dados correspondentes a cada parcela estabelecendo uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática, optando por uma estratégia de cálculo, ao invés de contagem, sem erros na estratégia de resolução escolhida. As evidências enquadram a aluna no nível 3 dos critérios estabelecidos.
Subtração	Retirar		A aluna reconhece o sentido retirar presente na situação problemática e identifica os dados correspondentes ao aditivo e subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática problema. Opta por uma estratégia de resolução, na qual comete um erro de cálculo, que afeta o resultado. As evidências enquadram a aluna no nível 3 dos critérios estabelecidos.
	Completar		A aluna reconhece o sentido completar presente na situação problemática, identifica os dados correspondentes ao aditivo subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática. Opta por uma estratégia de resolução, na qual comete um erro de cálculo. As evidências enquadram a aluna no nível 3 dos critérios estabelecidos.
	Comparar		A aluna reconhece o sentido comparar presente na situação problemática e identifica os dados correspondentes ao aditivo subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática. Opta por uma estratégia de cálculo, sem falhas na sua aplicação. As evidências enquadram a aluna no nível 3 dos critérios estabelecidos.

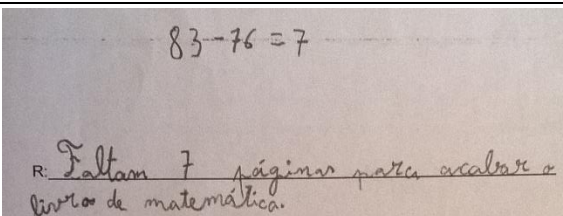
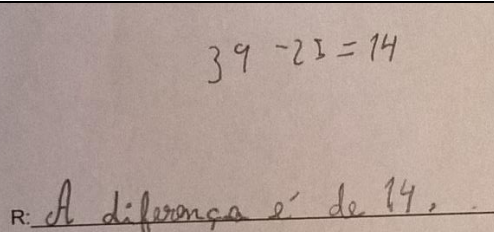
Aluno C

Sentido das operações		Evidências	Observações
Adição	Juntar		O aluno compreende a presença do sentido juntar presente na situação problemática e identifica os dados correspondentes a cada parcela, estabelecendo uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática, sem qualquer erro na implementação da estratégia de resolução escolhida. As evidências enquadram o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.
	Acrescentar		O aluno compreende a presença do sentido acrescentar presente na situação problemática e identifica os dados correspondentes a cada parcela, estabelecendo uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática, sem qualquer erro na implementação da estratégia de resolução escolhida. As evidências enquadram o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.
Subtração	Retirar		O aluno reconhece o sentido retirar presente na situação problemática, identifica os dados correspondentes ao aditivo e subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática. Opta por uma estratégia de resolução, na qual comete um erro de cálculo. As evidências enquadram o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.
	Completar		O aluno reconhece o sentido completar presente na situação problemática, identifica os dados correspondentes ao aditivo e subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática. Opta por uma estratégia de resolução, na qual comete um erro de cálculo. As evidências enquadram o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.

	Comparar		O aluno reconhece o sentido comparar presente na situação problemática, identifica os dados correspondentes ao aditivo e subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática, sem qualquer erro na implementação da estratégia de resolução escolhida. As evidências enquadram o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.
--	----------	--	--

Aluno D

Sentido das operações		Evidências	Observações
Adição	Juntar		O aluno compreende a presença do sentido juntar presente na situação problemática e identifica os dados correspondentes a cada parcela, estabelecendo uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática, sem qualquer erro na implementação da estratégia de resolução escolhida. As evidências enquadram o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.
	Acrescentar		O aluno compreende a presença do sentido acrescentar presente na situação problemática e identifica os dados correspondentes a cada parcela, estabelecendo uma relação entre a soma e a resposta à situação problemática, sem qualquer erro na implementação da estratégia de resolução escolhida. As evidências enquadram o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.
Subtração	Retirar		O aluno reconhece o sentido retirar presente na situação problemática, identifica os dados correspondentes ao aditivo e subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática, sem qualquer erro na implementação da

			estratégia de resolução escolhida. As evidências enquadram o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.
	Completar		O aluno reconhece o sentido completar presente na situação problemática, identifica os dados correspondentes ao aditivo e subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática, sem qualquer erro na implementação da estratégia de resolução escolhida. As evidências enquadram o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.
	Comparar		O aluno reconhece o sentido comparar presente na situação problemática, identifica os dados correspondentes ao aditivo e subtrativo e a relação entre a diferença e a resposta à situação problemática, sem qualquer erro na implementação da estratégia de resolução escolhida. As evidências enquadram o aluno no nível 3 dos critérios estabelecidos.